Title: Leçons de Géométrie Supérieure
Professées en 1905-1906

Author: Ernest Vessiot

Editor: Anzemberger

Release Date: January 24, 2011 [EBook #35052]

Language: French

Character set encoding: ISO-8859-1

Produced by Andrew D. Hwang, Laura Wisewell, Pierre Lacaze
and the Online Distributed Proofreading Team at
http://www.pgdp.net (The original copy of this book was
generously made available for scanning by the Department
of Mathematics at the University of Glasgow.)

NOTES SUR LA TRANSCRIPTION

Ce livre a été réalisé à l'aide d'un manuscrit dactylographié, dont les images ont été fournies par le Département des Mathématiques de l'Université de Glasgow.

Des modifications mineures ont été apportées à la présentation, l'orthographe, la ponctuation et aux notations mathématiques. Le fichier LaTeX source contient les notes de ces corrections.

PUBLICATIONS DU LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

De l'Université de Lyon

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

Professées en 1905–1906

PAR M. E. VESSIOT

RÉDIGÉES PAR M. ANZEMBERGER

IMPRIMERIES RÉUNIES

ANCIENNES MAISONS

DELAROCHE ET SCHNEIDER

8, rue Rachais

BUREAUX { *85, rue de la République* / *9, quai de l'Hôpital*

LYON

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre I. Révision des points essentiels de la théorie des Courbes Gauches et des Surfaces Développables. **1**

I. Courbes Gauches.

1. Trièdre de Serret-Frenet. 1
2. Formules de Serret-Frenet. 2
3. Courbure et torsion. 4
4. Discussion. Centre de courbure. 5
5. Signe de la torsion. Forme de la courbe. 6
6. Mouvement du trièdre de Serret-Frenet. 7
7. Calcul de la courbure. 8
8. Calcul de la torsion 9
9. Sphère osculatrice. 10

II. Surfaces développables.

10. Propriétés générales. 11
11. Réciproques. 13
12. Surface rectifiante. Surface polaire. 14

Chapitre II. Surfaces. **17**

1. Courbes tracées sur une surface. Longeurs d'arc et angles. 17
2. Déformation et représentation conforme. 18
3. Les directions conjuguées et la forme $\sum l\, d^2x$. 21
4. Formules fondamentales pour une courbe de la surface. 24

Chapitre III. Étude des Éléments Fondamentaux des Courbes d'une Surface. **29**

1. Courbure normale. 29
2. Variations de la courbure normale. 30
3. Lignes minima. 34
4. Lignes asymptotiques. 37
5. Surfaces minima. 39
6. Lignes courbure. 41
7. Courbure géodésique. 43
8. Torsion géodésique. 46

Chapitre IV. Les Six Invariants — La Courbure Totale. **51**
1. Les six invariants. 51
2. Les conditions d'intégrabilité. 54
3. Courbure totale. 57
4. Coordonnées orthogonales et isothermes. 58
5. Relations entre la courbure totale et la courbure géodésique. 61

Chapitre V. Surfaces Réglées. **67**
1. Surfaces développables. 67
2. Développées des courbes gauches. 70
3. Lignes de courbure. 71
4. Développement d'une surface développable sur un plan. 73
5. Lignes géodésiques d'une surface développable. 76
6. Surfaces réglées gauches. Trajectoires orthogonales des génératrices. 79
7. Cône directeur. Point central. Ligne de striction. 81
8. Variations du plan tangent le long d'une génératrice. 82
9. Élément linéaire. 86
10. La forme Ψ et les lignes asymptotiques. 90
11. Lignes de courbure. 96
12. Centre de courbure géodésique. 96

Chapitre VI. Congruences de Droites. **99**
1. Points et plans focaux. 99
2. Développables de la congruence. 103
3. Sur le point de vue corrélatif. 109
4. Détermination des développables d'une congruence. 114

Chapitre VII. Congruences de Normales. **117**
1. Propriété caractéristique des congruences de normales. 117
2. Relations entre une surface et sa développée. 119
3. Étude des surfaces enveloppes de sphères. 121
4. Lignes de courbure et lignes asymptotiques. 126
5. Lignes de courbure des enveloppes de sphères. 128
6. Cas où une des nappes de la développée est une développable. . . . 130

Chapitre VIII. Les Congruences de Droites et les Correspondances Entre Deux Surfaces. **139**
1. Nouvelle représentation des congruences. 139
2. Emploi des coordonnées homogènes. 140
3. Correspondances spéciales. 144
4. Correspondance par plans tangents parallèles. 151

Chapitre IX. Complexes de Droites. **155**
1. Éléments fondamentaux d'un complexe de droites. 155
2. Surfaces du complexe. 157
3. Complexes spéciaux. 161
4. Surfaces normales aux droites du complexe. 165

Chapitre X. Complexes Linéaires. 167
1. Généralités sur les complexes algébriques. 167
2. Coordonnées homogènes. 167
3. Complexe linéaire. 171
4. Faisceau de complexes. 171
5. Complexes en involution. 172
6. Droites conjuguées. 174
7. Réseau de complexes. 178
8. Courbes du complexe. 178
9. Surfaces normales du complexe. 181
10. Surfaces réglées du complexe. 183

Chapitre XI. Transformations Dualistiques. Transformation de Sophus Lie. 185
1. Éléments et multiplicités de contact. 185
2. Transformations de contact. 187
3. Transformation de Sophus Lie. 191
4. Transformation des droites en sphères. 194
5. Transformation des lignes asymptotiques. 196
6. Transformations des lignes de courbure. 197

Chapitre XII. Systèmes Triples Orthogonaux. 199
1. Théorème de Dupin. 199
2. Équation aux dérivées partielles de Darboux. 200
3. Systèmes triples orthogonaux contenant une surface. 203
4. Systèmes triples orthogonaux contenant une famille de plans. 203
5. Systèmes triples orthogonaux contenant une famille de sphères. . . . 204
6. Systèmes triples orthogonaux particuliers. 206

Chapitre XIII. Congruences de Sphères et Systèmes Cycliques. 207
1. Généralités. 207
2. Congruences spéciales. 209
3. Théorème de Dupin. 210
4. Congruence des droites D. 213
5. Congruence des droites Δ. 215
6. Le système triple de Ribaucour. 216
7. Congruences de cercles et systèmes cycliques. 217
8. Surfaces de Weingarten. 222

PREFACE.

Ces leçons ont été professées en 1905–1906, pour répondre au programme spécial d'Analyse Mathématique de l'Agrégation. Elles ont été autographiées à la demande de mes étudiants, et rédigées par l'un d'eux.

Peut-être pourront-elles être utiles aux étudiants désireux de s'initier à la géométrie supérieure, et leur être une bonne préparation à l'étude des livres de M. Darboux et des mémoires originaux.

J'ai supposé connus seulement les principes les plus simples de la théorie du contact ; j'ai repris les points essentiels de la théorie des courbes gauches et de la théorie des surfaces, en mettant en évidence le rôle essentiel des formules de Frenet et des deux formes quadratiques différentielles de Gauss.

L'objet principal de mes leçons était l'étude des systèmes de droites, et leur application à la théorie des surfaces. Il était naturel d'y joindre l'étude des systèmes de sphères, que j'ai poussée jusqu'aux propriétés élémentaires, si attrayantes, des systèmes cycliques de Ribaucour. J'ai insisté sur la correspondance des droites et des sphères, je l'ai éclairée par l'emploi des notions d'éléments de contact et de multiplicités, qui est également utile dans la théorie des congruences de droites ; j'ai montré comment elle se traduisait par la transformation de contact de Lie.

J'ai cherché à développer les diverses questions par la voie la plus naturelle et la plus analytique ; voulant montrer à mes élèves comment la recherche méthodique, la discussion approfondie des questions même les plus simples, l'étude attentive et l'interprétation des résultats conduisent aux conséquences les plus intéressantes.

Le 1er Juin 1906.
E. VESSIOT.

CHAPITRE PREMIER.

RÉVISION DES POINTS ESSENTIELS DE LA THÉORIE DES COURBES GAUCHES ET DES SURFACES DÉVELOPPABLES.

I. COURBES GAUCHES.

Trièdre de Serret-Frenet.

1. Les coordonnées d'un point d'une courbe gauche peuvent s'exprimer en fonction d'un paramètre t

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t).$$

Nous considérerons dans une telle courbe la *tangente*, qui a pour paramètres directeurs $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ et le *plan osculateur* qui contient la tangente $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ et l'accélération $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$ et dont par suite les coefficients sont les déterminants du deuxième ordre déduits du tableau

$$\begin{Vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{Vmatrix}$$

Remarque. Si on change de paramètre, en posant $t = \varphi(u)$, l'accélération nouvelle $\left(\frac{d^2x}{du^2}, \frac{d^2y}{du^2}, \frac{d^2z}{du^2}\right)$ est toujours dans le plan osculateur.

Considérons en un point M d'une courbe la tangente MT, la normale située dans le plan osculateur, ou *normale principale* MN, et la normale MB perpendiculaire au plan osculateur, ou *binormale*. Ces trois droites forment un trièdre trirectangle que nous appellerons *trièdre de Serret ou de Frenet*. L'une de ses faces, celle déterminée par la tangente et la normale principale, est le plan osculateur ; celle déterminée par la normale principale et la binormale est le plan normal ; enfin celle déterminée par la tangente et la binormale s'appelle le *plan rectifiant*.

Prenons sur la courbe une origine des arcs quelconques, et un sens des arcs croissants également quelconque. La différentielle de l'arc s est donnée par la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

d'où

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

et

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

$\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}$ sont ainsi les cosinus directeurs d'une des directions de la tangente, celle qui correspond au sens des arcs croissants ; soient a, b, c ces cosinus directeurs, nous avons

$$(1) \qquad a = \frac{dx}{ds}, \qquad b = \frac{dy}{ds}, \qquad c = \frac{dz}{ds}.$$

Nous prendrons sur la normale principale une direction positive arbitraire de cosinus directeurs a', b', c' et sur la binormale une direction positive de cosinus directeurs a'', b'', c'' telle que le trièdre constitué par ces trois directions ait même disposition que le trièdre de coordonnées. On a alors

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 1$$

et chaque élément de ce déterminant est égal à son coefficient.

Formules de Serret-Frenet.

2. Il existe entre ces cosinus directeurs et leurs différentielles des relations importantes. Nous avons en effet

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

d'où en dérivant par rapport à s

$$\sum a \frac{da}{ds} = 0.$$

Mais d'après les relations (1) on a

$$\frac{da}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \frac{db}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2}, \qquad \frac{dc}{ds} = \frac{d^2z}{ds^2},$$

et la relation précédente s'écrit :

$$\sum a \frac{d^2x}{ds^2} = 0.$$

La direction de coefficients directeurs

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} \quad \text{ou} \quad \frac{da}{ds}, \quad \frac{db}{ds}, \quad \frac{dc}{ds}$$

est donc perpendiculaire à la tangente ; d'autre part elle est dans le plan osculateur, c'est donc la normale principale, et on a des relations de la forme :

$$(2) \qquad \frac{da}{ds} = \frac{1}{\mathrm{R}} a', \qquad \frac{db}{ds} = \frac{1}{\mathrm{R}} b', \qquad \frac{dc}{ds} = \frac{1}{\mathrm{R}} c'.$$

On en déduit, pour le facteur $\dfrac{1}{\mathrm{R}}$,

$$(3) \qquad \frac{1}{\mathrm{R}} = \sum a' \frac{da}{ds}.$$

De ces relations on tire, en multipliant par a'', b'', c'' et ajoutant

$$\sum a'' \frac{da}{ds} = 0.$$

D'autre part on a

$$\sum aa'' = 0$$

d'où en dérivant

$$\sum a \frac{da''}{ds} + \sum a'' \frac{da}{ds} = 0$$

et par suite

$$\sum a \frac{da''}{ds} = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\sum a''^2 = 1$$

d'où

$$\sum a'' \frac{da''}{ds} = 0$$

et les deux relations précédentes montrent que la direction $\frac{da''}{ds}, \frac{db''}{ds}, \frac{dc''}{ds}$ est perpendiculaire à la tangente et à la binormale. C'est donc encore la normale principale, et on a des relations de la forme :

$$(4) \qquad \frac{da''}{ds} = \frac{1}{\mathrm{T}}\, a', \qquad \frac{db''}{ds} = \frac{1}{\mathrm{T}}\, b', \qquad \frac{dc''}{ds} = \frac{1}{\mathrm{T}}\, c'.$$

On en déduit, pour le facteur $\frac{1}{\mathrm{T}}$,

$$(5) \qquad \frac{1}{\mathrm{T}} = \sum a' \frac{da''}{ds}.$$

Enfin de la relation

$$\sum a'a'' = 0$$

on tire

$$\sum a' \frac{da''}{ds} + \sum a'' \frac{da'}{ds} = 0,$$

ou

$$\sum a'' \frac{da'}{ds} = -\sum a' \frac{da''}{ds} = -\frac{1}{\mathrm{T}}.$$

De la relation

$$\sum a'a = 0$$

on tire de même

$$\sum a \frac{da''}{ds} = -\sum a' \frac{da}{ds} = -\frac{1}{\mathrm{R}},$$

et enfin de

$$\sum a'^2 = 0$$

on tire

$$\sum a' \frac{da'}{ds} = 0.$$

On a ainsi trois équations en $\dfrac{da'}{ds}, \dfrac{db'}{ds}, \dfrac{dc'}{ds}$,

$$\sum a \frac{da'}{ds} = -\frac{1}{\mathrm{R}},$$
$$\sum a' \frac{da'}{ds} = 0,$$
$$\sum a'' \frac{da'}{ds} = -\frac{1}{\mathrm{T}},$$

et l'on en tire

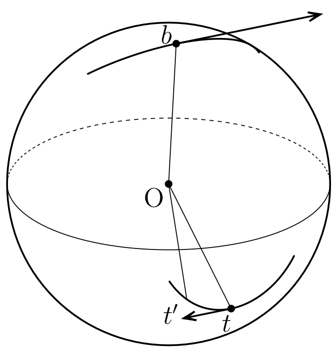
$$(6) \qquad \frac{da'}{ds} = -\frac{a}{\mathrm{R}} - \frac{a''}{\mathrm{T}}, \qquad \frac{db'}{ds} = -\frac{b}{\mathrm{R}} - \frac{b''}{\mathrm{T}}, \qquad \frac{dc'}{ds} = -\frac{c}{\mathrm{R}} - \frac{c''}{\mathrm{T}}.$$

Les trois groupes de relations (2), (4), (6) constituent *les formules de Serret ou de Frenet.*

Courbure et torsion.

3. *Interprétation de* R. Considérons le point t de coordonnées a, b, c. Les formules (2) expriment une propriété de la courbe lieu de ces points ; cette courbe est tracée sur une sphère de rayon 1, on l'appelle *indicatrice sphérique* de la courbe (C), et les formules (2) montrent que *la tangente en t à l'indicatrice sphérique est parallèle à la normale principale en* M *à la courbe* C. Soit u l'arc de cette indicatrice compté à partir d'une origine arbitraire dans un sens également arbitraire, on aura

$$\frac{da}{du} = ea', \qquad \frac{db}{du} = eb', \qquad \frac{dc}{du} = ec', \qquad (e = \pm 1)$$



d'où, en tenant compte des formules (2)

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = e\,\frac{du}{ds}.$$

Considérons alors les points t, t' correspondant aux points M, M′ ; $\dfrac{du}{ds}$ est la limite du rapport $\dfrac{\text{arc}\, tt'}{\text{arc}\, \mathrm{MM}'}$ quand M′ se rapproche indéfiniment de M. L'arc tt' étant infiniment petit peut être remplacé par l'arc de grand cercle correspondant, qui n'est autre que la mesure de l'angle $t\mathrm{O}t'$ des deux tangentes infiniment voisines ; c'est *l'angle de contingence* ; cette limite s'appelle la *courbure* de la courbe au point C ; R est le *rayon de courbure.*

Interprétation de T. Pour interpréter T, on considérera de même le lieu du point b de coordonnées a, b, c, ou *deuxième indicatrice sphérique.* On pourra remarquer que d'après les formules (2), (4), *les tangentes en t, b aux deux indicatrices sont parallèles à la normale principale en* M. Si v est l'arc de cette deuxième indicatrice sphérique, on trouvera comme précédemment que

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = e' \frac{dv}{ds} \qquad (e' = \pm 1)$$

et que $\dfrac{1}{\mathrm{T}}$ est la limite du rapport de l'angle des plans osculateurs en M, M′ à l'arc MM′ ; c'est la *torsion* en M, et T est le *rayon de torsion.*

Les deux indicatrices sont polaires réciproques sur la sphère.

Discussion. Centre de courbure.

4. Les cosinus directeurs que nous avons introduits dépendent de trois hypothèses arbitraires sur la disposition du trièdre de coordonnées, le sens des arcs croissants, et le sens positif choisi sur la normale principale. Si nous changeons ces hypothèses, et si nous désignons par e_1, e_2, e_3 des nombres égaux à ± 1, s sera remplacé par $e_1 s$, a, b, c par $e_1 a, e_1 b, e_1 c$; a', b', c' par $e_2 a, e_2 b, e_2 c$; et enfin, d'après les relations

$$a'' = e_3(bc' - cb'), \qquad b'' = e_3(ca' - ac'), \qquad c'' = e_3(ab' - ba'),$$

a'', b'', c'' seront remplacés par $e_1e_2e_3a'', e_1e_2e_3b'', e_1e_2e_3c''$. Les formules (2) donnent alors

$$\frac{e_1\, da}{e_1\, ds} = \frac{1}{\mathrm{R}}\, e_2 a', \qquad \text{etc}\ldots,$$

c'est à dire R se change en $e_2\mathrm{R}$; et son signe ne dépend que de la direction positive choisie sur la normale principale.

Donc le point C de la normale principale, tel que l'on ait $\mathrm{MC} = \mathrm{R}$ (R étant défini algébriquement comme précédemment), est un élément géométrique attaché à la courbe donnée. Ce point C s'appelle *centre de courbure en* M.

Voyons maintenant T. Les formules (4) donnent

$$\frac{e_1e_2e_3\, da''}{e_1\, ds} = \frac{1}{\mathrm{T}}\, e_2 a', \qquad \text{etc.}$$

ou

$$\frac{e_3\, da''}{ds} = \frac{1}{\mathrm{T}}\, a', \qquad \text{etc.}$$

Donc T se change en $e_3\mathrm{T}$; et le signe de T dépend uniquement de la disposition du trièdre de coordonnées. Il n'y a donc pas lieu de définir un centre de torsion.

Signe de la torsion. Forme de la courbe.

5. Pour interpréter le signe de T, nous allons étudier la rotation d'un plan passant par la tangente MT et par un point M′ de la courbe infiniment voisin. Rapportons la courbe au trièdre de Serret, la tangente étant OX, la normale principale OY, la binormale OZ. Alors $a = 1$, $a' = 0$, $a'' = 0$, $b = 0$, $b' = 1$, $b'' = 0$, $c = 0$, $c' = 0$, $c'' = 1$. Nous allons chercher les développements des coordonnées d'un point de la courbe infiniment voisin de M suivant les puissances croissantes de ds, (ds étant l'arc de la courbe compté à partir du point O).

Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} &= \frac{ds}{1}\frac{dx}{ds} + \frac{ds^2}{2}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{ds^3}{6}\frac{d^3x}{ds^3} + \dots,\\
\mathrm{Y} &= \frac{ds}{1}\frac{dy}{ds} + \frac{ds^2}{2}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{ds^3}{6}\frac{d^3y}{ds^3} + \dots,\\
\mathrm{Z} &= \frac{ds}{1}\frac{dz}{ds} + \frac{ds^2}{2}\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{ds^3}{6}\frac{d^3z}{ds^3} + \dots.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{ds} = a = 1,\\
&\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{da}{ds} = \frac{a'}{\mathrm{R}} = 0,\\
&\frac{d^3x}{ds^3} = \frac{d^2a}{ds^2} = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{da'}{ds} + \frac{d\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}}\right)}{ds}a' = \frac{1}{\mathrm{R}}\left(-\frac{a}{\mathrm{R}} - \frac{a''}{\mathrm{T}}\right) - \frac{1}{\mathrm{R}^2}a'\frac{d\mathrm{R}}{ds} = -\frac{1}{\mathrm{R}^2},
\end{aligned}$$

et de même pour les autres coordonnées. On trouve ainsi

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{X} &= ds \qquad\qquad - \frac{1}{6\mathrm{R}^2}ds^3 + \dots,\\
\mathrm{Y} &= \frac{1}{2\mathrm{R}}ds^2 - \frac{1}{6\mathrm{R}^2}\frac{d\mathrm{R}}{ds}ds^3 + \dots,\\
\mathrm{Z} &= \qquad\qquad - \frac{1}{6\mathrm{RT}}ds^3 + \dots.
\end{aligned}\right.$$

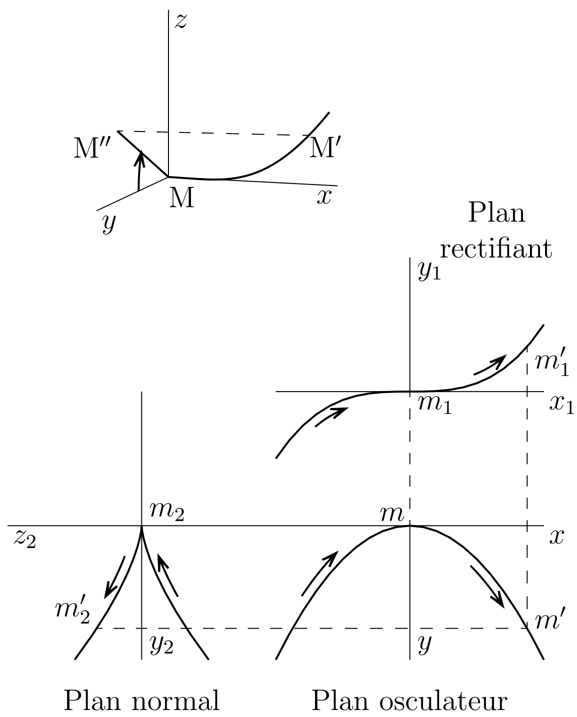
Tels sont les développements des coordonnées, du point M′ voisin de M.

Le plan que nous considérons passe par la tangente ; le sens de sa rotation est donné par le signe de $\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Y}}$, coefficient angulaire de sa trace sur le plan des YZ. Or,

$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Y}} = -\frac{ds}{3\mathrm{T}}\left[1 + ds\,(\dots\dots)\right].$$

Ce coefficient angulaire est positif si $\mathrm{T} < 0$, pour s croissant, c'est à dire si le point se déplace dans la direction de la tangente ; le plan va alors tourner dans le sens positif. Le point M′ étant au-dessus du plan des XY, l'arc MM′ de la courbe est en avant du plan XZ, si $\mathrm{T} < 0$; il est au contraire en arrière si $\mathrm{T} > 0$.

Les formules (7) permettent de représenter les projections de la courbe sur les trois faces du trièdre de Serret dans le voisinage du point M. Nous supposerons pour faire ces projections $R > 0$ et $T < 0$.



La considération des formules (7) prises deux à deux montre que sur le plan rectifiant (XZ) la projection a au point m_1 un point d'inflexion, la tangente inflexionnelle étant OX. Sur le plan osculateur, la projection a au point m un point ordinaire, la tangente étant OX ; enfin sur le plan normal (Y, Z) la projection a en m_2 un point de rebroussement, la tangente de rebroussement étant OY.

Mouvement du trièdre de Serret-Frenet.

6. *Remarque.* Considérons un point P invariablement lié au trièdre de Serret, et soient X, Y, Z ses coordonnées constantes par rapport à ce trièdre ; soient ξ, η, ζ les coordonnées de ce point par rapport à un système d'axes fixes. Lorsque le sommet du trièdre de Serret décrit la courbe donnée, les projections de la vitesse du point P sur les axes fixes sont, en remarquant que l'on a

$$\begin{aligned}
\xi &= x + a\mathrm{X} + a'\mathrm{Y} + a''\mathrm{Z},\\
\eta &= y + b\mathrm{X} + b'\mathrm{Y} + b''\mathrm{Z},\\
\zeta &= z + c\mathrm{X} + c'\mathrm{Y} + c''\mathrm{Z},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{dx}{dt} + \mathrm{X}\frac{da}{dt} + \mathrm{Y}\frac{da'}{dt} + \mathrm{Z}\frac{da''}{dt},\\
\frac{d\eta}{dt} &= \frac{dy}{dt} + \mathrm{X}\frac{db}{dt} + \mathrm{Y}\frac{db'}{dt} + \mathrm{Z}\frac{db''}{dt},\\
\frac{d\zeta}{dt} &= \frac{dz}{dt} + \mathrm{X}\frac{dc}{dt} + \mathrm{Y}\frac{dc'}{dt} + \mathrm{Z}\frac{dc''}{dt},
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{ds}{dt}\,a + \mathrm{X}\,\frac{a'}{\mathrm{R}} + \mathrm{Y}\left(-\frac{a}{\mathrm{R}} - \frac{a''}{\mathrm{T}}\right) + \mathrm{Z}\,\frac{a'}{\mathrm{T}},\\
\frac{d\eta}{dt} &= \frac{ds}{dt}\,b + \mathrm{X}\,\frac{b'}{\mathrm{R}} + \mathrm{Y}\left(-\frac{b}{\mathrm{R}} - \frac{b''}{\mathrm{T}}\right) + \mathrm{Z}\,\frac{b'}{\mathrm{T}},\\
\frac{d\zeta}{dt} &= \frac{ds}{dt}\,c + \mathrm{X}\,\frac{c'}{\mathrm{R}} + \mathrm{Y}\left(-\frac{c}{\mathrm{R}} - \frac{c''}{\mathrm{T}}\right) + \mathrm{Z}\,\frac{c'}{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

Les projections de la vitesse sur les axes mobiles sont alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_x &= a\,\frac{d\xi}{dt} + b\,\frac{d\eta}{dt} + c\,\frac{d\zeta}{dt} = \frac{ds}{dt}\left(1-\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{R}}\right),\\
\mathrm{V}_y &= a'\,\frac{d\xi}{dt} + b'\,\frac{d\eta}{dt} + c'\,\frac{d\zeta}{dt} = \frac{ds}{dt}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{R}}+\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{T}}\right),\\
\mathrm{V}_z &= a''\,\frac{d\xi}{dt} + b''\,\frac{d\eta}{dt} + c''\,\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{ds}{dt}\,\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{T}},
\end{aligned}$$

$\dfrac{ds}{dt}$ est la vitesse du sommet du trièdre. Si nous ne considérons que la vitesse de rotation, nous savons que, si p, q, r sont les composantes de la rotation instantanée sur les axes mobiles, on a

$$\mathrm{V}_x = q\mathrm{Z} - r\mathrm{Y}, \qquad \mathrm{V}_y = r\mathrm{X} - p\mathrm{Z}, \qquad \mathrm{V}_z = p\mathrm{Y} - q\mathrm{X},$$

et nous trouvons ainsi, en identifiant avec les expressions précédentes (dans l'hypothèse $t = s$)

$$p = -\frac{1}{\mathrm{T}}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{1}{\mathrm{R}},$$

ce qui montre qu'*à chaque instant, la rotation instantanée est dans le plan rectifiant et a pour composantes suivant la tangente et la binormale la torsion et la courbure.*

Si l'on suppose le trièdre de Serret transporté à l'origine, il tourne autour de son sommet, l'axe instantané de rotation est dans le plan rectifiant, et le mouvement du trièdre est obtenu par le roulement de ce plan sur un certain cône.

Calcul de R.

7. Reprenons la formule (3)

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \sum a'\,\frac{da}{ds}.$$

Nous avons

$$a = \frac{dx}{ds},$$

d'où

$$\frac{da}{ds} = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3}.$$

Soit maintenant

$$\mathrm{A} = dy\,d^2z - dz\,d^2y, \qquad \mathrm{B} = dz\,d^2x - dx\,d^2z, \qquad \mathrm{C} = dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

et posons

$$\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2} = \mathrm{D}.$$

$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont les coefficients du plan osculateur, et par suite les cosinus directeurs de la binormale sont

$$a'' = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}, \qquad b'' = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}, \qquad c'' = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}},$$

et les cosinus directeurs de la normale principale, perpendiculaire aux deux droites précédentes, sont

$$
\begin{aligned}
a' &= \frac{\mathrm{B}\,dz - \mathrm{C}\,dy}{\mathrm{D}\,ds} = \frac{dx^2\,(dz^2 + dy^2) - dx\,(dz\,d^2z + dy\,d^2y)}{\mathrm{D}\,ds} \\
&= \frac{d^2x\,ds^2 - dx\,ds\,d^2s}{\mathrm{D}\,ds} = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{\mathrm{D}}, \\
b' &= \ldots \qquad c' = \ldots,
\end{aligned}
$$

et alors

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \sum a' \frac{da}{ds} = \sum \frac{\mathrm{B}\,dz - \mathrm{C}\,dy}{\mathrm{D}\,ds}\,\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3}$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{D}\,ds^3}\sum d^2x\,(\mathrm{B}\,dz - \mathrm{C}\,dy) - \frac{d^2s}{\mathrm{D}\,ds^4}\sum dx\,(\mathrm{B}\,dz - \mathrm{C}\,dy)$$

et se réduit à :

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{D}\,ds^3}\sum d^2x\,(\mathrm{B}\,dz - \mathrm{C}\,dy) = \frac{1}{\mathrm{D}\,ds^3}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{D}}{ds^3},$$

d'où enfin :

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\sqrt{\sum(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2}}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Calcul de T.

8. On aura de même

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \sum a' \frac{da''}{ds} = \sum \frac{\mathrm{B}\,dz - \mathrm{C}\,dy}{\mathrm{D}\,ds}\,\frac{\mathrm{D}\,d\mathrm{A} - \mathrm{A}\,d\mathrm{D}}{\mathrm{D}^2\,ds}$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{D}^2\,ds^2}\sum d\mathrm{A}\,(\mathrm{B}\,dz - \mathrm{C}\,dy) - \frac{d\mathrm{D}}{\mathrm{D}^3\,ds^2}\sum \mathrm{A}\,(\mathrm{B}\,dz - \mathrm{C}\,dy)$$

et se réduit à

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{D}^2\,ds^2}\sum d\mathrm{A}\,(\mathrm{B}\,dz - \mathrm{C}\,dy) = \frac{1}{\mathrm{D}^2\,ds}\sum(dy\,d^3z - dz\,d^3y)(ds\,d^2x - dx\,d^2s)$$

ou

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{D}^2}\sum d^2x(dy\,d^3z - dz\,d^3y) - \frac{d^2s}{\mathrm{D}^2\,ds}\sum dx\,(dy\,d^3z - dz\,d^3y);$$

la deuxième somme est nulle, et il reste

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{D}^2}\sum d^2x\,(dy\,d^3z - dz\,d^3y) = -\frac{1}{\mathrm{D}^2}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

avec

$$\mathrm{D}^2 = \sum (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2.$$

Remarque. Pour que la torsion d'une courbe soit constamment nulle, il faut et il suffit que l'on ait constamment

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exige que x, y, z soient liés par une relation linéaire, à coefficients constants, c'est-à-dire que la courbe soit plane. Ainsi *les courbes à torsion constamment nulle sont des courbes planes.*

Sphère osculatrice.

9. Cherchons les sphères qui ont en M, avec la courbe considérée, un contact du second ordre. Le centre (x_0, y_0, z_0) et le rayon R_0 d'une telle sphère sont, d'après la théorie du contact, déterminés par les équations suivantes, que nous développons au moyen des formules de Serret-Frenet :

$$\sum (x - x_0)^2 - \mathrm{R}_0^2 = 0,$$
$$\frac{d}{ds}\left\{\sum (x - x_0)^2 - \mathrm{R}^2\right\} = 0, \quad \text{cést-à-dire} \quad \sum a(x - x_0) = 0,$$
$$\frac{d^2}{ds^2}\left\{\sum (x - x_0)^2 - \mathrm{R}^2\right\} = 0, \quad \text{cést-à-dire} \quad 1 + \frac{1}{\mathrm{R}}\sum a'(x - x_0) = 0.$$

Si on prend le trièdre de Serret-Frenet pour trièdre de coordonnées, comme on l'a fait plus haut, elles se réduisent à

$$\sum \mathrm{X}_0 - \mathrm{R}_0^2 = 0, \qquad \mathrm{X}_0 = 0, \qquad \mathrm{Y}_0 = -\mathrm{R};$$

et l'équation générale des sphères cherchées est, Z_0 restant arbitraire,

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 - 2\mathrm{RY} - 2\mathrm{Z}_0\mathrm{Z} = 0.$$

C'est un faisceau de sphères, dont fait partie le plan osculateur $\mathrm{Z} = 0$. On vérifie ainsi la propriété de contact du plan osculateur.

Le cercle commun à toutes ces sphères est, de plus, d'après la théorie du contact des courbes, celui qui a un contact du second ordre avec la courbe, cést-à-dire le *cercle osculateur*. Les équations sont

$$\mathrm{Z} = 0, \qquad \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 2\mathrm{RY} = 0,$$

cést-à-dire qu'il est dans le plan osculateur, a pour centre le centre de courbure C ($X = 0$, $Y = R$), et passe en M. Le lieu des centres des sphères considérées est l'axe du cercle osculateur.

Parmi toutes ces sphères, il y en a une qui a un contact du troisième ordre avec la courbe. On l'obtient en introduisant la condition nouvelle :

$$\frac{d^3}{ds^3}\left\{\sum(x-x_0)^2 - R^2\right\} = 0,$$

cést-à-dire

$$-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\sum a'(x-x_0) - \frac{1}{R}\left\{\frac{1}{R}\sum a(x-x_0) + \frac{1}{T}\sum a''(x-x_0)\right\} = 0,$$

qui se réduit, avec les axes particuliers employés, à

$$Z_0 = -T\,\frac{dR}{ds}.$$

Le centre de cette *sphère osculatrice* est donc défini par les formules :

$$X_0 = 0, \qquad Y_0 = -R, \qquad Z_0 = -T\,\frac{dR}{ds}.$$

Et son rayon est donné par

$$R_0^2 = R^2 + T^2\,\frac{dR^2}{ds^2}.$$

II. SURFACES DÉVELOPPABLES.

Propriétés générales.

10. Une courbe gauche est le lieu de ∞^1 points ; corrélativement nous considérerons une surface développable, enveloppe de ∞^1 plans ; la caractéristique de l'un de ces plans correspond corrélativement à la tangente en un point de la courbe, puisqu'elle est l'intersection de deux plans infiniment voisins.

Soit

$$uX + vY + wZ + h = 0, \tag{1}$$

l'équation générale des plans considérés, de sorte que u, v, w, h désignent des fonctions données d'un paramètre t.

Les caractéristiques ont, d'après la théorie des enveloppes, pour équations générales,

$$\begin{cases} uX + uY + wZ + h = 0, \\ du\,X + dv\,Y + dw\,Z + dh = 0. \end{cases} \tag{2}$$

La surface développable, enveloppe des plans (1), est, d'après la théorie des enveloppes, le lieu des droites (2), qui en sont, par conséquent, les génératrices rectilignes ; et, toujours d'après la théorie des enveloppes, chacun des plans (1) est tangent à la surface tout le long de la génératrice (2) correspondant à la même valeur de t.

Considérons alors la courbe (C), lieu des points (x, y, z) définis par les équations :

$$(3) \qquad \begin{cases} ux + vy + wz + h = 0, \\ u\,dx + v\,dy + w\,dz + dh = 0, \\ u\,d^2x + v\,d^2y + w\,d^2z + d^2h = 0. \end{cases}$$

L'un quelconque de ses points M est sur la droite (2), correspondant à la même valeur de t, et, par conséquent, dans le plan (1) correspondant. Cherchons la tangente à (C) en M. Il faut différentier les équations (3) ; différentiant chacune des deux premières, en tenant compte de la suivante, nous trouvons

$$(4) \qquad \begin{cases} u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0, \\ du\,dx + dv\,dy + dw\,dz = 0, \end{cases}$$

ce qui exprime que la direction de la tangente est la même que celle de la droite (2). Donc les tangentes à (C) sont les génératrices de la développable.

Cherchons encore le plan osculateur à (C) en M. Il doit passer par la tangente, et être parallèle à la direction (d^2x, d^2y, d^2z). Or, si on différentie la première des équations (4), en tenant compte de la seconde, on trouve

$$u\,d^2x + v\,d^2y + w\,d^2z = 0,$$

ce qui montre que le plan (1) satisfait à ces conditions. Donc le plan osculateur de (C) est le plan qui enveloppe la développable.

(C) s'appelle l'*arête de rebroussement* de la développable

Donc *toute développable est l'enveloppe des plans osculateurs de son arête de rebroussement, et est engendrée par les tangentes à son arête de rebroussement.*

Remarques. Nous avons fait implicitement diverses hypothèses. D'abord que le déterminant des équations (3) n'est pas nul. S'il l'est, on a

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ du & dv & dw \\ d^2u & d^2v & d^2w \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui exprime que u, v, w sont liés par une relation linéaire homogène à coefficients constants ; cést-à-dire que les plans (1) sont parallèles à une droite fixe. Dans ce cas, les droites (2) sont parallèles à cette même direction, et la surface est un *cylindre*. Dans ce cas figure, comme *cas singulier*, celui où tous les plans (1) passent par une droite fixe, qui est alors l'enveloppe.

Écartant ce cas, nous avons admis qu'il y avait un lieu des points M. Ceci suppose que M n'est pas fixe. S'il en était ainsi les équations (3) étant vérifiées par les coordonnées de ce point fixe, les plans (1) passeraient par ce point fixe, ainsi que les droites (2). L'enveloppe serait un *cône*.

Écartons encore ce cas. Nous avons admis encore que les droites (2) engendraient une surface. Mais cela n'est en défaut que si elles sont toutes confondues, ce qui est le cas singulier déjà examiné.

Remarquons enfin que la courbe (C) est forcément gauche, car si elle était plane, son plan étant son plan osculateur unique, et nos raisonnements ne cessant pas de s'appliquer, tous les plans (1) seraient confondus. Il n'y aurait donc pas ∞^1 plans (1).

Réciproques.

11. *Réciproquement les plans osculateurs en tous les points d'une courbe gauche enveloppent une développable.* En effet, si nous reprenons les notations du N° 1, le plan osculateur en un point x, y, z d'une courbe a pour équation

$$\sum a''(\mathrm{X}-x)=0.$$

Sa caractéristique est représentée par l'équation précédente et

$$\sum \frac{da''}{ds}(\mathrm{X}-x)-\sum a''\frac{dx}{ds}=0;$$

mais on a

$$\sum a''\frac{dx}{ds}=0, \qquad \frac{da''}{ds}=\frac{1}{\mathrm{T}}a';$$

les équations de la caractéristique sont donc

$$\sum a'(\mathrm{X}-x)=0, \qquad \sum a''(\mathrm{X}-x)=0.$$

Et, si on prend comme trièdre de coordonnées le trièdre de Serret-Frenet, elles se réduisent à

$$\mathrm{Y}=0, \qquad \mathrm{Z}=0.$$

Donc la caractéristique du plan osculateur en un point d'une courbe gauche est la tangente à cette courbe, et l'enveloppe de ce plan est bien une surface développable. L'arête de rebroussement a pour équations

$$\sum a''(\mathrm{X}-x)=0, \quad \sum a'(\mathrm{X}-x)=0, \quad \sum \frac{da'}{ds}(\mathrm{X}-x)-\sum a'\frac{dx}{ds}=0.$$

Considérons la troisième équation ; remarquons que l'on a

$$\sum a'\frac{dx}{ds}=0, \qquad \frac{da'}{ds}=-\left(\frac{a}{\mathrm{R}}+\frac{a''}{\mathrm{T}}\right);$$

elle s'écrit alors

$$\sum\left(\frac{a}{\mathrm{R}}+\frac{a''}{\mathrm{T}}\right)(\mathrm{X}-x)=0,$$

ou encore, en tenant compte de la première équation

$$\sum a(\mathrm{X}-x)=0.$$

Nous avons ainsi trois équations linéaires et homogènes en $\mathrm{X}-x$, $\mathrm{Y}-y$, $\mathrm{Z}-z$, dont le déterminant est 1 ; donc

$$\mathrm{X}-x=0, \qquad \mathrm{Y}-y=0, \qquad \mathrm{Z}-z=0;$$

l'arête de rebroussement est la courbe elle-même.

Remarque. Le nom d'arête de rebroussement provient de ce fait que la *section de la développable par le plan normal en* M *à l'arête de rebroussement présente au point* M *un point de rebroussement.* En effet, rapportons la courbe au trièdre de Serret relatif au point M : les coordonnées d'un point de la courbe voisin du point M sont, d'après les formules établies au N° 5

$$\begin{aligned} x &= ds - \frac{1}{6\mathrm{R}^2}\,ds^3 + \dots, \\ y &= \qquad \frac{1}{2\mathrm{R}}\,ds^2 - \frac{1}{6\mathrm{R}^2}\frac{d\mathrm{R}}{ds}\,ds^3 + \dots, \\ z &= \qquad\qquad - \frac{1}{6\mathrm{RT}}\,ds^3 + \dots. \end{aligned}$$

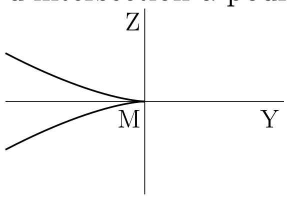
Les coordonnées d'un point de la tangente au point x, y, z sont

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= x + \lambda\frac{dx}{ds} = \left(ds - \frac{1}{6\mathrm{R}^2}\,ds^3 + \dots\right) + \lambda\left(1 - \frac{1}{2\mathrm{R}^2}\,ds^2 + \dots\right), \\ \mathrm{Y} &= y + \lambda\frac{dy}{ds} = \left(\frac{1}{2\mathrm{R}}\,ds^2 - \frac{1}{6\mathrm{R}^2}\frac{d\mathrm{R}}{ds}\,ds^3 + \dots\right) + \lambda\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\,ds - \frac{1}{2\mathrm{R}^2}\frac{d\mathrm{R}}{ds}\,ds^2 + \dots\right), \\ \mathrm{Z} &= z + \lambda\frac{dz}{ds} = \left(-\frac{1}{6\mathrm{RT}}\,ds^3 + \dots\right) + \lambda\left(-\frac{1}{2\mathrm{RT}}\,ds^2 + \dots\right). \end{aligned}$$

Prenons l'intersection de cette tangente avec le plan normal $\mathrm{X} = 0$, nous avons

$$\lambda = -\frac{ds + \dots}{1 + \dots} = -ds + \dots$$

et la courbe d'intersection a pour équations



$$\begin{aligned} \mathrm{Y} &= -\frac{1}{2\mathrm{R}}\,ds^2 + \dots, \\ \mathrm{Z} &= \frac{1}{3\mathrm{RT}}\,ds^3 + \dots. \end{aligned}$$

On voit qu'elle a au point M un point de rebroussement, la tangente de rebroussement étant la normale principale.

Surface rectifiante. Surface polaire.

12. *Remarques.* Cherchons les surfaces développables enveloppes des faces du trièdre de Serret dans une courbe gauche (C). Nous venons de voir que *le plan osculateur enveloppe la surface développable qui admet pour arête de rebroussement* (C).

Considérons maintenant le plan rectifiant

$$\sum a'(\mathrm{X} - x) = 0$$

la caractéristique est représentée par l'équation précédente et par

$$\frac{1}{\mathrm{R}}\sum a(\mathrm{X} - x) + \frac{1}{\mathrm{T}}\sum a''(\mathrm{X} - x) = 0.$$

Si on prend les axes de Serret ces équations deviennent

$$\mathrm{Y} = 0, \qquad \frac{1}{\mathrm{R}}\,\mathrm{X} + \frac{1}{\mathrm{T}}\,\mathrm{Z} = 0,$$

la caractéristique contient le point $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{X} = -\dfrac{1}{\mathrm{T}}$, $\mathrm{Z} = \dfrac{1}{\mathrm{R}}$, extrémité du vecteur qui représente la rotation instantanée du trièdre ; *c'est l'axe instantané de rotation du trièdre de Serret.* Son lieu s'appelle la *surface rectifiante.* Elle contient la courbe (C).

Considérons enfin le plan normal

$$\sum a(\mathrm{X} - x) = 0;$$

la deuxième équation de la caractéristique est

$$\sum \frac{da}{ds}\,(\mathrm{X} - x) - \sum a\,\frac{dx}{ds} = 0,$$

ou

$$\frac{1}{\mathrm{R}} \sum a'(\mathrm{X} - x) - 1 = 0.$$

Cette caractéristique s'appelle la *droite polaire*, et son lieu s'appelle la *surface polaire.*

Prenant de nouveau les axes de Serret, les équations de la droite polaire deviennent

$$\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{R};$$

Elle se confond donc avec *l'axe du cercle osculateur.*

Si nous cherchons le point d'intersection de la droite polaire avec l'arête de rebroussement de la surface polaire, nous avons les trois équations

$$\sum a(\mathrm{X} - x) = 0, \quad \sum a'(\mathrm{X} - x) - \mathrm{R} = 0, \quad \frac{1}{\mathrm{T}} \sum a''(\mathrm{X} - x) + \frac{d\mathrm{R}}{ds} = 0,$$

qui deviennent, en prenant les axes de Serret,

$$\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{R}, \qquad \mathrm{Z} = -\frac{1}{\mathrm{T}}\,\frac{d\mathrm{R}}{ds}.$$

Or, ce sont les coordonnées du centre de la sphère osculatrice. (Voir N° 9).

Donc *le point ou la droite polaire touche son enveloppe est le centre de la sphère osculatrice à la courbe* (C). *On peut dire encore que la courbe* (C) *est la trajectoire orthogonale des plans osculateurs au lieu des centres de ses sphères osculatrices.*

EXERCICES.

1. Trouver l'axe instantané de rotation et de glissement du trièdre de Serret.
2. Trouver les hélices circulaires osculatrices à une courbe gauche. Déterminer celle de ces hélices qui a même torsion que la courbe donnée.

3. Approfondir les relations entre une courbe et le lieu des centres de ses sphères osculatrices (courbure, torsion, élément d'arc).
4. Chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe soit une courbe sphérique.
5. Déterminer toutes les courbes satisfaisant aux relations :

$$\frac{d\mathrm{R}}{ds} = \mathrm{F}(\mathrm{R}), \qquad \mathrm{T} = \mathrm{G}(\mathrm{R}),$$

   où F et G sont des fonctions données.
6. Déterminer toutes les courbes à courbure constante.
7. Déterminer toutes les courbes à torsion constante.

CHAPITRE II.

SURFACES.

Le ds^2 de la surface, et les angles.

1. *Courbes tracées sur une surface. Longueurs d'arc et angles.* Les coordonnées d'un point d'une surface peuvent s'exprimer en fonction de deux paramètres arbitraires

$$(\mathrm{S}) \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v);$$

u, v sont les *coordonnées curvilignes* d'un point de la surface (S). On définira une courbe (c) de la surface en établissant une relation entre u, v ; ou, ce qui revient au même, en exprimant u, v en fonction d'un même paramètre t

$$(c) \qquad u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t).$$

La tangente à cette courbe a pour paramètres directeurs

$$(1) \quad dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv, \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv;$$

la tangente est déterminée par les différentielles du, dv.

L'élément d'arc a pour expression :

$$(2) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 = \Phi(du, dv)$$

en posant

$$\mathrm{E} = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad \mathrm{F} = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \mathrm{G} = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2.$$

Imaginons deux courbes passant par un même point (u, v) de la surface ; soient du, dv les différentielles correspondant à l'une d'elles ; $\delta u, \delta v$ celles correspondant à l'autre ; $ds, \delta s$ les différentielles des arcs correspondants. Si V est l'angle des deux courbes, nous avons

$$\cos\mathrm{V} = \sum \frac{dx\,\delta x}{ds\,\delta s};$$

or,

$$\begin{aligned} \sum dx\,\delta x &= \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\delta v\right) \\ &= \mathrm{E}\,du\,\delta u + \mathrm{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}\,dv\,\delta v; \end{aligned}$$

c'est une forme polaire de la forme quadratique $\Phi(du, dv)$ et on a

$$(3) \qquad \cos\mathrm{V} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta u\,\dfrac{\partial\Phi(du, dv)}{\partial\,du} + \delta v\,\dfrac{\partial\Phi(du, dv)}{\partial\,dv}}{\sqrt{\Phi(du, dv)\,\Phi(\delta u, \delta v)}}$$

Pour que les deux courbes soient orthogonales, il faut et il suffit que $\cos \mathrm{V} = 0$, ou

$$\mathrm{E}\,du\,\delta u + \mathrm{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}\,dv\,\delta v = 0. \tag{4}$$

En particulier, cherchons à quelles conditions les courbes coordonnées $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ forment un réseau orthogonal ; alors $dv = 0$, $\delta u = 0$, la condition précédente se réduit à

$$\mathrm{F}\,du\,\delta v = 0,$$

et comme $du, \delta v$ ne sont pas constamment nuls, on a $\mathrm{F} = 0$. Dans ce cas, le carré de l'élément d'arc prend la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2.$$

Remarque. Si on définit la surface par une équation de la forme

$$\mathrm{Z} = f(x, y)$$

en désignant comme d'habitude par p, q les dérivées partielles de Z par rapport à x, y, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2 = (1 + p^2)\,ds^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2,$$

cést-à-dire

$$\mathrm{E} = 1 + p^2, \qquad \mathrm{F} = pq, \qquad \mathrm{G} = 1 + q^2.$$

Déformation et représentation conforme.

2. *Surfaces applicables. Représentations conformes.* Considérons deux surfaces $(\mathrm{S}), (\mathrm{S}')$

$$(\mathrm{S}) \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v)$$
$$(\mathrm{S}') \qquad x = \mathrm{F}(u', v'), \qquad y = \mathrm{G}(u', v'), \qquad z = \mathrm{H}(u', v')$$

on peut établir une correspondance point par point entre ces deux surfaces, et cela d'une infinité de manières. Il suffit de poser

$$u' = \varphi(u, v), \qquad v' = \psi(u, v),$$

les fonctions ψ, φ étant quelconques ; à condition toutefois que les équations précédentes soient résolubles en u, v. Les équations de la surface (S') peuvent alors se mettre sous la forme

$$(\mathrm{S}') \qquad x = \mathrm{F}_1(u, v), \qquad y = \mathrm{G}_1(u, v), \qquad z = \mathrm{H}_1(u, v),$$

ce qui revient à dire que les points correspondants correspondent aux mêmes systèmes de valeurs des paramètres.

Soient les éléments d'arcs sur ces deux surfaces

$$\begin{aligned} ds^2 &= \mathrm{E}\,du^2 \;\; + 2\mathrm{F}\,du\,dv \;\; + \mathrm{G}\,dv^2 \\ ds_1^2 &= \mathrm{E}_1\,du^2 + 2\mathrm{F}_1\,du\,dv + \mathrm{G}_1\,dv^2 \end{aligned}$$

Supposons ces éléments d'arc identiques, $\mathrm{E} \equiv \mathrm{E}_1$, $\mathrm{F} \equiv \mathrm{F}_1$, $\mathrm{G} \equiv \mathrm{G}_1$. Si alors u, v sont exprimés en fonction du paramètre t, les arcs des deux courbes correspondantes sur les deux surfaces compris entre deux points correspondants ont tous deux pour expression

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2},$$

t_0, t_1 étant les valeurs de t correspondant aux extrémités. Réciproquement, si les arcs homologues de deux courbes homologues sur les deux surfaces ont même longueur, les éléments d'arc sont identiques sur les deux surfaces. On dit que les deux surfaces sont *applicables* l'une sur l'autre, ou résultent l'une de l'autre par *déformation.*

Dans cette correspondance, la fonction Φ étant la même pour les deux surfaces, la formule (3) montre que les angles se conservent. Mais la réciproque n'est pas vraie. L'expression de $\cos \mathrm{V}$ est homogène et du premier degré en $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$; pour que les angles de deux courbes homologues soient égaux, il faut et il suffit que

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_1} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}_1} = \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G}_1} = \chi(u, v),$$

ce rapport étant indépendant de du, dv. On dit dans ce cas qu'il y a *représentation conforme* des deux surfaces l'une sur l'autre.

Problème de la représentation conforme.

Étant données deux surfaces, il est toujours possible d'établir entre elles une représentation conforme. Ceci revient à dire que l'on peut exprimer u_1, v_1 en fonction de u, v de telle sorte que l'on ait,

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 = \chi(u, v)(\mathrm{E}_1\,du^2 + 2\mathrm{F}_1\,du\,dv + \mathrm{G}_1\,dv^2).$$

Décomposons les deux ds^2 en facteurs du premier degré. Remarquons que $\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$ est la somme des carrés des déterminants déduits du tableau

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{matrix} \right\|;$$

$\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$ est positif pour toute surface réelle. Posons

$$\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \mathrm{H}^2;$$

alors

$$ds^2 = \mathrm{E}\left(du + \frac{\mathrm{F} + i\mathrm{H}}{\mathrm{E}}\,dv\right)\left(du + \frac{\mathrm{F} - i\mathrm{H}}{\mathrm{E}}\,dv\right);$$

chacun des facteurs du deuxième membre admet un facteur intégrant. On a donc

$$\begin{aligned} du + \frac{\mathrm{F} + i\mathrm{H}}{\mathrm{E}}\, dv &= \mathrm{M}(u, v)\, d\alpha(u, v),\\ du + \frac{\mathrm{F} - i\mathrm{H}}{\mathrm{E}}\, dv &= \mathrm{N}(u, v)\, d\beta(u, v). \end{aligned}$$

Les fonctions α, β sont indépendantes ; en effet $d\alpha$ et $d\beta$ ne peuvent s'annuler en même temps si $\mathrm{H} \neq 0$, ce que nous supposons. Nous pouvons donc prendre α, β comme coordonnées curvilignes sur la première surface, et nous avons

$$ds^2 = \mathrm{P}(u, v)\, d\alpha\, d\beta = \Theta(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

De même pour la deuxième surface, nous pourrons écrire

$$ds_1^2 = \mathrm{P}_1(u_1, v_1)\, d\alpha_1\, d\beta_1 = \Theta_1(\alpha_1, \beta_1)\, d\alpha_1\, d\beta_1.$$

Nous aurons alors à satisfaire à l'équation

$$\Theta(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \Omega(\alpha, \beta)\, \Theta_1(\alpha_1, \beta_1)\, d\alpha_1\, d\beta_1.$$

Remarquons que pour $d\alpha = 0$, on doit avoir $d\alpha_1\, d\beta_1 = 0$. Si nous prenons $d\alpha_1 = 0$, α_1 sera fonction de α et de même β_1 sera fonction de β

$$\alpha_1(u_1, v_1) = \varphi\big(\alpha(u, v)\big), \qquad \beta_1(u_1, v_1) = \psi\big(\beta(u, v)\big).$$

Au contraire en prenant $d\beta_1 = 0$, β_1 sera fonction de α et de même α_1, de β

$$\beta_1(u_1, v_1) = \varphi\big(\alpha(u, v)\big) \qquad \alpha_1(u_1, v_1) = \psi\big(\beta(u, v)\big).$$

On voit donc bien que l'on peut toujours établir une représentation conforme. Et nous avons de plus la solution générale de ce problème.

Condition pour que deux surfaces soient applicables.

Deux surfaces données ne sont pas en général applicables l'une sur l'autre.

Autrement dit, étant données deux surfaces, il est impossible d'établir entre elles une correspondance telle que $ds^2 = ds_1^2$. En effet, en reprenant le calcul précédent, il faudrait satisfaire à la relation

$$\Theta(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = \Theta_1(\alpha_1, \beta_1)\, d\alpha_1\, d\beta_1,$$

il faudrait comme précédemment, prendre par exemple

$$\alpha_1 = \varphi(\alpha) \qquad \beta_1 = \psi(\beta);$$

et la relation à satisfaire devient

$$\Theta(\alpha, \beta) = \Theta_1\big(\varphi(\alpha), \psi(\beta)\big)\, \varphi'(\alpha)\, \psi'(\beta);$$

il est facile de voir que, les fonctions Θ, Θ_1 étant données, il est impossible en général de trouver des fonctions φ, ψ, satisfaisant à cette relation. Considérons en effet le cas particulier où la deuxième surface est le plan $z = 0$. Dans ce cas $ds_1^2 = dx^2 + dy^2 = d\alpha_1\, d\beta_1$ et on devrait avoir

$$\Theta(\alpha, \beta) = \varphi'(\alpha)\, \psi'(\beta);$$

or, la fonction Θ étant quelconque, n'est pas le produit d'une fonction de α par une fonction de β.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$\log \Theta(\alpha, \beta) = \log \varphi'(\alpha) + \log \psi'(\beta),$$

ou

$$\frac{\partial^2 \log \Theta(\alpha, \beta)}{\partial\alpha\, \partial\beta} = 0.$$

Nous venons ainsi de montrer qu'une surface n'est pas en général applicable sur un plan, et de trouver la condition pour qu'une surface soit applicable sur un plan.

Les directions conjuguées et la forme $\sum l\, d^2x$.

3. *Développables circonscrites. Directions conjuguées.*

Corrélativement aux courbes tracées sur la surface, lieux de ∞^1 points de la surface, nous considérerons les développables circonscrites, enveloppes de ∞^1 plans tangents à la surface. Définissons le plan tangent en un point de la surface. Soient l, m, n les coefficients directeurs de la normale, et supposons les coordonnées rectangulaires. Nous devons avoir pour toute courbe de la surface

$$l\, dx + m\, dy + n\, dz = 0;$$

en particulier, pour les courbes coordonnées, $u =$ const. et $v =$ const. nous aurons

$$\begin{aligned} l\,\frac{\partial x}{\partial u} + m\,\frac{\partial y}{\partial u} + n\,\frac{\partial z}{\partial u} &= 0,\\ l\,\frac{\partial x}{\partial v} + m\,\frac{\partial y}{\partial v} + n\,\frac{\partial z}{\partial v} &= 0, \end{aligned}$$

et ces relations montrent que l, m, n, sont proportionnels aux déterminants fonctionnels $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$,

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{A} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(u, v)}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(u, v)}, \qquad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)};$$

nous avons vu d'ailleurs que $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = \mathrm{H}^2$; donc les cosinus directeurs de la normale sont

$$\text{(2)} \qquad \lambda = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{H}}, \qquad \mu = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{H}}, \qquad \nu = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{H}}.$$

Considérons une développable circonscrite ; nous pourrons la définir en exprimant u, v en fonction d'un paramètre t,

$$u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t);$$

alors le point (u, v) décrit une courbe de la surface, soit (c), et les plans tangents à la surface aux divers points de (c) enveloppent la développable considérée. Le plan tangent à la surface au point (x, y, z) est, $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ étant les coordonnées courantes,

$$l\,(\mathrm{X} - x) + m\,(\mathrm{Y} - y) + n\,(\mathrm{Z} - z) = 0;$$

la caractéristique est définie par l'équation précédente et par l'équation

$$dl\,(\mathrm{X} - x) + dm\,(\mathrm{Y} - y) + dn\,(\mathrm{Z} - z) = 0$$

obtenue en différentiant la précédente par rapport à t, et remarquant que l'on a

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0.$$

Voyons quelle est la direction de cette caractéristique. Soient $\delta x, \delta y, \delta z$ ses coefficients de direction. Elle est tangente à la surface, donc on peut poser

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\delta v, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\delta v, \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\delta v;$$

en remplaçant $\mathrm{X} - x, \mathrm{Y} - y, \mathrm{Z} - z$ par les quantités proportionnelles $\delta x, \delta y, \delta z$, on obtient

$$dl\,\delta x + dm\,\delta y + dn\,\delta z = 0;$$

or, on a

$$dl = \frac{\partial l}{\partial u}\,du + \frac{\partial l}{\partial v}\,dv, \quad dm = \frac{\partial m}{\partial u}\,du + \frac{\partial m}{\partial v}\,dv, \quad dn = \frac{\partial n}{\partial u}\,du + \frac{\partial n}{\partial v}\,dv;$$

donc la relation

$$\sum dl\,\delta x = 0$$

s'écrit

$$\sum \left(\frac{\partial l}{\partial u}\,du + \frac{\partial l}{\partial v}\,dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\delta v\right) = 0.$$

Ordonnons par rapport à du, dv, $\delta u, \delta v$. Remarquons que l'on a

$$\sum l\,\frac{\partial x}{\partial u} = 0;$$

d'où en dérivant par rapport à u

$$\sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \sum \frac{\partial l}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial u} = 0;$$

de même, la relation

$$\sum l\,\frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

donne
$$\sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \sum \frac{\partial l}{\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial v} = 0;$$
et
$$\sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \sum \frac{\partial l}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} = 0;$$
de sorte que la relation précédente s'écrit
$$(3) \qquad \sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du\,\delta u + \sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,dv\,\delta v = 0.$$
Telle est la relation qui existe entre les coefficients de direction de la caractéristique et de la tangente à la courbe de contact. Elle serait visiblement la même en coordonnées obliques, l, m, n étant alors les coefficients de l'équation du plan tangent soit
$$(4) \qquad \mathrm{E}' = \sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad \mathrm{F}' = \sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \qquad \mathrm{G}' = \sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$
et
$$(5) \qquad \Psi(du, dv) = \mathrm{E}'\,du^2 + 2\mathrm{F}'\,du\,dv + \mathrm{G}'\,dv^2.$$
On a, en particulier, quand on prend $l = \mathrm{A}$, $m = \mathrm{B}$, $n = \mathrm{C}$:
$$\mathrm{E}' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{F}' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{G}' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$
La relation précédente s'écrira alors
$$\mathrm{E}'\,du\,\delta u + \mathrm{F}'\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}'\,dv\,\delta v = 0,$$
ou
$$(6) \qquad \frac{\partial \Psi(du, dv)}{\partial\,du}\,\delta u + \frac{\partial \Psi(du, dv)}{\partial\,dv}\,\delta v = 0.$$
Cette relation est symétrique par rapport à d, δ ; *il y a donc réciprocité entre la direction de la tangente à la courbe de contact de la développable et la direction de la caractéristique du plan tangent à cette développable.* Ces deux directions sont dites *directions conjuguées.*

Cherchons en particulier la condition pour que les courbes $u =$ const., $v =$ const. forment un réseau conjugué. Alors, $dv = 0$, $\delta u = 0$ la condition est $\mathrm{F}' = 0$.

Remarque. On a
$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv,$$
$$d^2 x = \frac{\partial x}{\partial u}\,d^2 u + \frac{\partial x}{\partial v}\,d^2 v + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,dv^2.$$

On en conclut, à cause de

$$\sum l \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum l \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

l'identité

$$\sum l\, d^2x = \left(\sum l \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) du^2 + 2\left(\sum l \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}\right) du\, dv + \left(\sum l \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right) dv^2,$$

c'est-à-dire

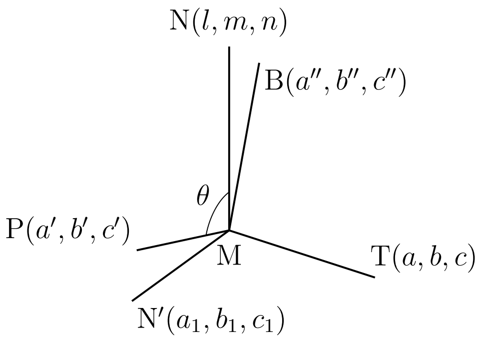
$$\sum l\, d^2x = \Psi(du, dv).$$

Formules fondamentales pour une courbe de la surface.

4. *Éléments fondamentaux d'une courbe de la surface.*

Nous considérerons en un point de la courbe le trièdre de Serret, et un trièdre constitué par la tangente à la courbe, la normale MN à la surface, et la tangente MN′ à la surface qui est normale à la courbe. Nous choisirons les directions positives de telle façon que le trièdre ainsi constitué ait même disposition que le trièdre de Serret, de sorte que si l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à la surface, a_1, b_1, c_1 de la tangente à la surface normale à la courbe, on ait

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1.$$



Les deux trièdres considérés ont un axe commun et de même direction, qui est la tangente. Pour les définir l'un par rapport à l'autre, il suffira de se donner l'angle d'une des arêtes de l'un avec l'une des arêtes de l'autre. Nous nous donnerons l'angle dont il faut faire tourner la demi-normale principale MP pour l'amener à coïncider avec la demi-normale à la surface MN, le sens positif des relations étant défini par la direction positive MT de l'axe de rotation. Cherchons les relations qui existent entre les cosinus directeurs des arêtes de ces trièdres. Quand on passe de l'un à l'autre, on fait en réalité une transformation de coordonnées autour de l'origine dans le plan normal. Considérons le point à l'unité de distance de M sur MN(l, m, n). Rapporté au système PMB il a pour coordonnées $\cos\theta$ et $\sin\theta$, donc

$$(1)\quad l = a'\cos\theta + a''\sin\theta, \qquad m = b'\cos\theta + b''\sin\theta, \qquad n = c'\cos\theta + c''\sin\theta;$$

de même le point à l'unité de distance sur MN′(a_1, b_1, c_1) rapporté au système PMB a pour coordonnées $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$ et $\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos\theta$, donc

$$(1')\quad a_1 = a'\sin\theta - a''\cos\theta, \quad b_1 = b'\sin\theta - b''\cos\theta, \quad c_1 = c'\sin\theta - c''\cos\theta.$$

On aura donc, en faisant la transformation de coordonnées inverse

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} a' &= l\cos\theta + a_1\sin\theta, & b' &= m\cos\theta + b_1\sin\theta, & c' &= n\cos\theta + c_1\sin\theta, \\ a'' &= l\sin\theta - a_1\cos\theta, & b'' &= m\sin\theta - b_1\cos\theta, & c'' &= n\sin\theta - c_1\cos\theta. \end{aligned}$$

Différentions les formules (1) par rapport à s : il vient

$$\begin{aligned} \frac{dl}{ds} &= (-a'\sin\theta + a''\cos\theta)\frac{d\theta}{ds} + \cos\theta\frac{da'}{ds} + \sin\theta\frac{da''}{ds}, \quad \text{et les analogues;} \\ \frac{da_1}{ds} &= (a'\cos\theta + a''\sin\theta)\frac{d\theta}{ds} + \sin\theta\frac{da'}{ds} - \cos\theta\frac{da''}{ds}, \quad \text{et les analogues;} \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte des formules de Frenet et des relations (1), (2)

$$\text{(3)} \qquad \frac{dl}{ds} = a_1\left(\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds}\right) - \frac{a\cos\theta}{\mathrm{R}} \qquad \text{et les analogues;}$$

$$\text{(4)} \qquad \frac{da_1}{ds} = -l\left(\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds}\right) - \frac{a\sin\theta}{\mathrm{R}} \qquad \text{(id.)} \quad ;$$

enfin nous avons

$$\text{(5)} \qquad \frac{da}{ds} = \frac{a'}{\mathrm{R}} = l\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}} + a_1\frac{\sin\theta}{\mathrm{R}} \qquad \text{(id.)} \quad ;$$

les formules fondamentales (3), (4), (5) *permettent de calculer* $\theta, \mathrm{R}, \mathrm{T}$, *c'est-à-dire de déterminer le plan osculateur, la courbure et la torsion de la courbe considérée.*

Formule pour $\dfrac{\cos\theta}{\mathrm{R}}$.

En effet, les formules (5) nous donnent d'abord

$$\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}} = \sum l\frac{da}{ds} = \sum l\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{\mathrm{H}}\sum \mathrm{A}\frac{d^2x}{ds^2},$$

c'est-à-dire, d'après le calcul du paragraphe précédent, et et en posant :

$$\mathrm{E}' = \sum \mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad \mathrm{F}' = \sum \mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \qquad \mathrm{G}' = \sum \mathrm{A}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$
$$\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\mathrm{E}'\,du^2 + 2\mathrm{F}'\,du\,dv + \mathrm{G}'\,dv^2}{ds^2},$$

ou enfin

$$\text{(6)} \qquad \frac{\cos\theta}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\Psi(du, dv)}{\Phi(du, dv)}.$$

Formule pour $\dfrac{\sin\theta}{\mathrm{R}}$.

Les formules (5) donnent encore

$$\frac{\sin\theta}{\mathrm{R}} = \sum a_1 \frac{da}{ds} = \sum a_1 \frac{d^2x}{ds^2}.$$

Remarquons que

$$\sum a_1 \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{ds^2}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ l & m & n \end{vmatrix} = \frac{1}{ds^3}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ l & m & n \end{vmatrix};$$

pour calculer le déterminant, multiplions-le par

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ l & m & n \end{vmatrix} = \mathrm{A}l + \mathrm{B}m + \mathrm{C}n = \frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}{\mathrm{H}} = \mathrm{H};$$

le produit est

$$\begin{vmatrix} \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\,dx & \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dx & \sum l\,dx \\ \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\,d^2x & \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\,d^2x & \sum l\,d^2x \\ \sum l\,\dfrac{\partial x}{\partial u} & \sum l\,\dfrac{\partial x}{\partial v} & \sum l^2 \end{vmatrix};$$

or, nous avons

$$\begin{gathered} \sum \frac{\partial x}{\partial u}\,dx = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) = \mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial v}\,dx = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) = \mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv, \\ \sum l\,dx = \sum l\,\frac{\partial x}{\partial u} = \sum l\,\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial x}{\partial u}\,d^2x &= \sum \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial x}{\partial v}\,d^2v + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du^2 + 2\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,dv^2\right) \\ &= \mathrm{E}\,d^2u + \mathrm{F}\,d^2v + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\,du^2 + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\,du\,dv + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)dv^2, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial v}\,d^2x &= \sum \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial x}{\partial v}\,d^2v + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du^2 + 2\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,dv^2\right) \\ &= \mathrm{F}\,d^2u + \mathrm{G}\,d^2v + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)du^2 + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\,du\,dv + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\,dv^2. \end{aligned}$$

Le produit précédent s'écrit donc

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}\,du+\mathrm{F}\,dv & \mathrm{F}\,du+\mathrm{G}\,dv & 0 \\ \begin{bmatrix} \mathrm{E}\,d^2u+\mathrm{F}\,d^2v \\ +\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\,du^2+\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\,du\,dv+\left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)dv^2 \end{bmatrix} & \mathrm{F}\,d^2u+\mathrm{G}\,d^2v+\dots & \sum l\,d^2x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$-\begin{vmatrix} \mathrm{E}\,d^2u+\mathrm{F}\,d^2v+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\,du^2+\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\,du\,dv+\left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)dv^2 & \mathrm{E}\,du+\mathrm{F}\,dv \\ \mathrm{F}\,d^2u+\mathrm{G}\,d^2v+\left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)du^2+\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\,du\,dv+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\,dv^2 & \mathrm{F}\,du+\mathrm{G}\,dv \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant peut se décomposer en deux, dont le premier est

$$-\begin{vmatrix} \mathrm{E}\,d^2u+\mathrm{F}\,d^2v & \mathrm{E}\,du+\mathrm{F}\,dv \\ \mathrm{F}\,d^2u+\mathrm{G}\,d^2v & \mathrm{F}\,du+\mathrm{G}\,dv \end{vmatrix} = \mathrm{H}^2\,(du\,d^2v-dv\,d^2u),$$

et on a finalement

$$(7)\quad \frac{\sin\theta}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{H}\,ds^3}\left[-\mathrm{H}^2\,(du\,d^2v-dv\,d^2u) - \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\,du^2+\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\,du\,dv+\left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)dv^2 & \mathrm{E}\,du+\mathrm{F}\,dv \\ \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)du^2+\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\,du\,dv+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\,dv^2 & \mathrm{F}\,du+\mathrm{G}\,dv \end{vmatrix}\right].$$

Formule pour $\dfrac{1}{\mathrm{T}}-\dfrac{d\theta}{ds}$.

Enfin la formule (4) nous donne

$$\frac{1}{\mathrm{T}}-\frac{d\theta}{ds} = \sum a_1\,\frac{dl}{ds} = \frac{1}{ds}\begin{vmatrix} a & b & c \\ dl & dm & dn \\ l & m & n \end{vmatrix} = \frac{1}{ds^2}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ dl & dm & dn \\ l & m & n \end{vmatrix};$$

pour calculer le déterminant, nous le multiplierons encore par le même déterminant H. Le produit sera,

$$\begin{vmatrix} \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\,dx & \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dx & \sum l\,dx \\ \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\,dl & \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dl & \sum l\,dl \\ \sum l\,\dfrac{\partial x}{\partial u} & \sum l\,\dfrac{\partial x}{\partial v} & \sum l^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{E}\,du+\mathrm{F}\,dv & \mathrm{F}\,du+\mathrm{G}\,dv & 0 \\ \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\,dl & \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dl & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\sum l\,\frac{\partial x}{\partial u} = 0,$$

d'où en différentiant

$$\sum dl\,\frac{\partial x}{\partial u} = -\sum l\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,dv\right) = -\frac{1}{\mathrm{H}}\,(\mathrm{E}'\,du + \mathrm{F}'\,dv);$$

de même

$$\sum dl\,\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{\mathrm{H}}\,(\mathrm{F}'\,du + \mathrm{G}'\,dv);$$

le produit est donc

$$-\frac{1}{\mathrm{H}}\begin{vmatrix} \mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv & \mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv \\ \mathrm{E}'\,du + \mathrm{F}'\,dv & \mathrm{F}'\,du + \mathrm{G}'\,dv \end{vmatrix},$$

et nous avons

$$(8) \qquad \frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\mathrm{H}^2\,ds^2}\begin{vmatrix} \mathrm{E}'\,du + \mathrm{F}'\,dv & \mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv \\ \mathrm{F}'\,du + \mathrm{G}'\,dv & \mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv \end{vmatrix}.$$

Les trois formules (6), (7), (8) permettent de calculer les trois éléments fondamentaux $\theta, \mathrm{R}, \mathrm{T}$.

EXERCICES.

8. On considère la surface S lieu des sections circulaires diamétrales d'une famille d'ellipsoïdes homofocaux. Déterminer sur S les trajectoires orthogonales des sections circulaires qui l'engendrent.

9. Déterminer toutes les représentations conformes d'une sphère sur un plan. Trouver celles qui donnent des systèmes connus de projections cartographiques.

10. Sur une surface S on considère une courbe C. Soit M un de ses points, MT la tangente à C, MN la normale à S, et MN′ la normale à C qui et tangente à (S). Montrer que les composantes de la rotation instantanée du trièdre (M.T N′ N) par rapport aux axes de ce trièdre sont les éléments fondamentaux $\dfrac{d\theta}{ds} - \dfrac{1}{\mathrm{T}}$, $-\dfrac{\cos\theta}{\mathrm{R}}$, $\dfrac{\sin\theta}{\mathrm{R}}$.

11. Si les courbes coordonnées de la surface S, de l'exercice précédent, sont rectangulaires, soient MU et MV leurs tangentes, et soit φ l'angle (MU, MT). Déduire de la considération des mouvements des deux trièdres (M.T N′ N) et (M.U V N), lorsque M décrit C, une formule de la forme

$$\frac{\sin\theta}{\mathrm{R}} - \frac{d\varphi}{ds} = r_1\frac{du}{ds} + r_2\frac{dv}{ds};$$

et donner les expressions de r_1 et r_2. Généraliser, en supposant les coordonnées u et v quelconques.

CHAPITRE III.

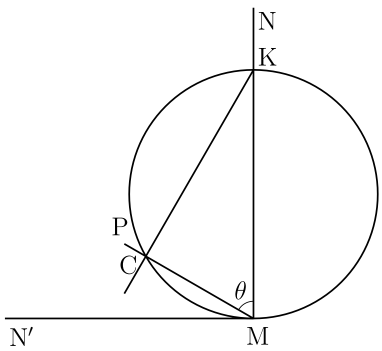
ÉTUDE DES ÉLÉMENTS FONDAMENTAUX DES COURBES D'UNE SURFACE.

Courbure normale.

1. Reprenons la première formule fondamentale

$$\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{H}} \frac{\mathrm{E}'\, du^2 + 2\mathrm{F}'\, du\, dv + \mathrm{G}'\, dv^2}{\mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2},$$

les différentielles secondes d^2u, d^2v n'y figurent pas ; $\dfrac{\cos\theta}{\mathrm{R}}$ ne dépend que du rapport $\dfrac{dv}{du}$, c'est à dire de la direction de la tangente, $\dfrac{\cos\theta}{\mathrm{R}}$ *est le même pour toutes les courbes de la surface tangentes à une même droite*. Considérons alors le centre de courbure C sur la normale principale MP ; si on prend pour axe polaire



la normale MN à la surface, et pour pôle le point M, R, θ sont les coordonnées polaires du point C. L'équation

$$\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}} = \text{const.},$$

représente un cercle ; le lieu du point C est un cercle, ce qu'on peut encore voir comme il suit ; considérons la droite polaire, elle est dans le plan normal à la courbe, donc elle rencontre la normale MN à la surface en un point K, et nous avons

$$\mathrm{R} = \mathrm{MK}\cos\theta,$$

ou

$$\mathrm{MK} = \frac{\mathrm{R}}{\cos\theta}.$$

MK est constant, donc *les droites polaires de toutes les courbes d'une surface passant par un même point* M *de cette surface et tangentes en ce point à une même droite rencontrent en un même point* K *la normale en* M *à la surface. Le lieu des centres de courbure de toutes ces courbes est le cercle de diamètre* MK (*cercle de Meusnier*). En particulier supposons $\theta = 0$, la normale principale se confond avec la normale à la surface, le plan osculateur passe par la normale, il est normal à la surface. Coupons la surface par ce plan, K est le centre de courbure en M de la section, soit R_n le rayon de courbure, nous avons

$$\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{R}_n},$$

d'où

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_n \cos\theta.$$

D'où le *Théorème de Meusnier : Le centre de courbure en* M *d'une courbe tracée sur une surface est la projection sur le plan osculateur en* M *à cette courbe du centre de courbure de la section normale tangente en* M *à la courbe.*

Le Théorème est en défaut si

$$\Psi(du, dv) = \mathrm{E}'\,du^2 + 2\mathrm{F}'\,du\,dv + \mathrm{G}'\,dv^2 = 0.$$

Alors $\dfrac{\cos\theta}{\mathrm{R}} = 0$, R est en général infini. La formule devient complètement indéterminée si on a en même temps $\cos\theta = 0$, alors la normale principale est perpendiculaire à la normale à la surface, le plan osculateur à la courbe est tangent à la surface. Les deux tangentes qui correspondent à ce cas d'exception s'appellent *les deux directions asymptotiques* (correspondant au point M considéré).

Le Théorème est également en défaut si

$$\Phi(du, dv) = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 = 0;$$

alors $\dfrac{\cos\theta}{\mathrm{R}}$ est infini, R est nul en général. La direction de la tangente est telle que

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

c'est une droite isotrope du plan tangent. Il y a donc *deux directions isotropes correspondantes à chaque point* M *de la surface.*

Variations de la courbure normale.

2. Le Théorème de Meusnier nous montre que, pour étudier la courbure des diverses courbes passant par un point d'une surface, on peut se borner à considérer les sections normales passant par les différentes tangentes à la surface au point considéré.

Nous avons

$$\frac{1}{\mathrm{R}_n} = \frac{1}{\mathrm{H}}\,\frac{\mathrm{E}'\,du^2 + 2\mathrm{F}'\,du\,dv + \mathrm{G}'\,dv^2}{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2}.$$

Considérons dans la plan tangent en M les tangentes MU, MV aux courbes coordonnées $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$ qui passent par M, et considérons le trièdre constitué par MU, MV et la normale MN à la surface : les cosinus directeurs des axes sont

$$\begin{array}{lllll}
\mathrm{MU}: & \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{du}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial x}{\partial u} = l', & \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial y}{\partial u} = m', & \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial z}{\partial u} = n', \\
\mathrm{MV}: & \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{dv}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial x}{\partial v} = l'', & \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial y}{\partial v} = m'', & \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial z}{\partial v} = n'', \\
\mathrm{MN}: & \qquad\qquad\qquad\qquad l, & \qquad m, & \qquad n.
\end{array}$$

Considérons alors une tangente MT quelconque, définie par les valeurs du, dv des différentielles des coordonnées. Les cosinus directeurs sont :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds} = \sqrt{\mathrm{E}}\,\frac{du}{ds}\,l' \ \ + \sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dv}{ds}\,l'',\\
\frac{dy}{ds} &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds} = \sqrt{\mathrm{E}}\,\frac{du}{ds}\,m' + \sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dv}{ds}\,m'',\\
\frac{dz}{ds} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds} = \sqrt{\mathrm{E}}\,\frac{du}{ds}\,n' \ \ + \sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dv}{ds}\,n''.
\end{aligned}$$

Ces formules montrent que le segment directeur de MT est la somme géométrique de deux segments, de valeurs algébriques

$$\lambda = \sqrt{\mathrm{E}}\,\frac{du}{ds}, \qquad \mu = \sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dv}{ds},$$

portés respectivement sur MU et MV. En d'autres termes : λ, μ sont les paramètres directeurs de MT dans le système de coordonnées $\mathrm{U, M, V}$.

La formule de R_n devient, en y introduisant ces paramètres directeurs :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{R}_n} &= \frac{1}{\mathrm{H}}\left(\mathrm{E}'\Big(\frac{du}{ds}\Big)^2 + 2\mathrm{F}'\,\frac{du}{ds}\,\frac{dv}{ds} + \mathrm{G}'\Big(\frac{dv}{ds}\Big)^2\right)\\
&= \frac{1}{\mathrm{H}}\left(\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}}\,\lambda^2 + \frac{2\mathrm{F}'}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\,\lambda\mu + \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}\,\mu^2\right).
\end{aligned}$$

Et si on considère le point P obtenu en portant sur MT un segment égal à $\pm\sqrt{\mathrm{R}_n}$, le lieu de ce point P, dont les coordonnées, dans le système $\mathrm{M, U, V}$, sont :

$$\mathrm{U} = \pm\lambda\sqrt{\mathrm{R}_n}, \qquad \mathrm{V} = \pm\mu\sqrt{\mathrm{R}_n},$$

aura pour équation

$$\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}}\,\mathrm{U}^2 + \frac{2\mathrm{F}'}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\,\mathrm{UV} + \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}\,\mathrm{V}^2 = \mathrm{H}.$$

C'est une conique à centre située dans le plan tangent, qu'on appelle *indicatrice* de la surface au point M. La conique tracée, on a immédiatement le rayon de courbure d'une section normale quelconque, et on suit sans peine la variation du rayon de courbure, quand MT varie.

La nature de l'indicatrice dépend du signe de $\dfrac{\mathrm{E'G'} - \mathrm{F}'^2}{\mathrm{EG}}$, ou puisque $\mathrm{E, G}$ sont positifs, de $\mathrm{E'G'} - \mathrm{F}'^2$. Dans le cas ou l'équation de la surface est

$$\mathrm{Z} = f(x, y)$$

on a en prenant les notations habituelles

$$ds^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2$$

d'où

$$\mathrm{E} = 1 + p^2, \qquad \mathrm{F} = pq, \qquad \mathrm{G} = 1 + q^2$$

et
$$\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$
Maintenant
$$\mathrm{A} = -p, \qquad \mathrm{B} = -q, \qquad \mathrm{C} = 1,$$
et
$$\sum \mathrm{A}\, d^2x = -\sum d\mathrm{A}\, dx = dp\, dx + dq\, dy.$$
Mais
$$dp = r\, dx + s\, dy, \qquad dq = s\, dx + t\, dy,$$
donc
$$\sum \mathrm{A}\, d^2x = r\, dx^2 + 2s\, dx\, dy + t\, dy^2;$$
donc
$$\mathrm{E}' = r, \qquad \mathrm{F}' = s, \qquad \mathrm{G}' = t,$$
et
$$\mathrm{E}'\mathrm{G}' - \mathrm{F}'^2 = rt - s^2.$$

1° $\mathrm{E}'\mathrm{G}' - \mathrm{F}'^2 > 0$, la conique est une ellipse, tous les rayons de courbure sont de même signe, on dit que la surface est *convexe* au point M ; elle est toute entière d'un même côté du plan tangent en M dans le voisinage du point M.

2° $\mathrm{E}'\mathrm{G}' - \mathrm{F}'^2 < 0$, l'indicatrice est une hyperbole. La surface traverse au point M son plan tangent ; elle est dite *à courbures opposées.*

3° $\mathrm{E}'\mathrm{G}' - \mathrm{F}'^2 = 0$, l'indicatrice est du genre parabole, et comme elle est à centre, elle se réduit à un système de deux droites parallèles. Le point M est dit *point parabolique.*

Considérons le cas particulier où $\dfrac{1}{\mathrm{R}_n}$ est constant, quelle que soit la section que l'on considéré. Il faut et il suffit pour cela que $\dfrac{1}{\mathrm{R}_n}$ soit indépendant de $\dfrac{du}{dv}$, donc que l'on ait
$$\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}.$$
Or, l'angle de MU, MV est donné par
$$\cos\theta = \sum l'\, l'' = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{EG}}};$$
ces conditions peuvent donc s'écrire
$$\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}} = \frac{\dfrac{\mathrm{F}'}{\sqrt{\mathrm{EG}}}}{\cos\theta} = \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}},$$
et expriment que l'indicatrice est un cercle. Le point M est dit alors un *ombilic.*

Cherchons les directions des axes de l'indicatrice. Ce sont des directions conjuguées par rapport aux directions asymptotiques de l'indicatrice, définies par
$$\Psi(du, dv) = 0$$

et par rapport aux directions isotropes du plan tangent, définies par

$$\Phi(du, dv) = 0.$$

Elles sont donc définies par l'équation

$$\frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial\, du}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\, du}} = \frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial\, dv}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\, dv}} = \frac{\Psi(du, dv)}{\Phi(du, dv)} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}} = \mathrm{S},$$

puisque du, dv sont des coordonnées homogènes pour les directions MT du plan tangent.

Ce sont les *directions principales*. Les rayons de courbure correspondants sont dits *rayons de courbure principaux*.

L'équation qui définit les directions principales est donc :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}\, du + \mathrm{F}\, dv & \mathrm{F}\, du + \mathrm{G}\, dv \\ \mathrm{E}'\, du + \mathrm{F}'\, dv & \mathrm{F}'\, du + \mathrm{G}'\, dv \end{vmatrix} = 0;$$

le premier membre est un covariant simultané des formes Φ, Ψ.

L'équation aux rayons de courbure principaux s'obtiendra en éliminant du, dv entre les équations

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\, du} = \mathrm{S}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\, du}, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\, dv} = \mathrm{S}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\, dv}.$$

Ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}' - \mathrm{SE} & \mathrm{F}' - \mathrm{SF} \\ \mathrm{F}' - \mathrm{SF} & \mathrm{G}' - \mathrm{SG} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\mathrm{S}^2(\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2) - \mathrm{S}(\mathrm{E\,G}' + \mathrm{G\,E}' - 2\mathrm{FF}') + \mathrm{E}'\mathrm{G}' - \mathrm{F}'^2 = 0$$

avec

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}}.$$

Supposons maintenant que les courbes coordonnées soient tangentes aux directions principales. Ces directions sont rectangulaires ; donc les courbes coordonnées constituent un réseau orthogonal, et $\mathrm{F} = 0$; alors l'indicatrice étant rapportée à ses axes on a

$$\mathrm{F}' = 0, \quad \mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{E\,G}}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{R}_n} = \frac{\lambda^2\mathrm{E}'}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{EG}}} + \frac{\mu^2\mathrm{G}'}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{EG}}}.$$

Si nous supposons $\lambda = 1$, $\mu = 0$, nous avons un des rayons de courbure principaux R_1

$$\frac{1}{\mathrm{R}_1} = \frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{EG}}};$$

pour $\mu = 1$, $\lambda = 0$, nous avons l'autre rayon de courbure principal R_2

$$\frac{1}{\mathrm{R}_2} = \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{EG}}},$$

et la formule devient
$$\frac{1}{\mathrm{R}_n} = \frac{\lambda^2}{\mathrm{R}_1} + \frac{\mu^2}{\mathrm{R}_2};$$
mais ici, les coordonnées étant rectangulaires, si φ est l'angle de la tangente MT avec l'une des directions principales, nous avons $\lambda = \cos\varphi$, $\mu = \sin\varphi$, et nous obtenons la *formule d'Euler*

$$\frac{1}{\mathrm{R}_n} = \frac{\cos^2\varphi}{\mathrm{R}_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\mathrm{R}_2}.$$

Considérons la tangente MT' perpendiculaire à MT, il faudra remplacer φ par $\varphi + \frac{\pi}{2}$, et nous aurons
$$\frac{1}{\mathrm{R}'_n} = \frac{\sin^2\varphi}{\mathrm{R}_1} + \frac{\cos^2\varphi}{\mathrm{R}_2}$$
d'où
$$\frac{1}{\mathrm{R}_n} + \frac{1}{\mathrm{R}'_n} = \frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}$$
donc *la somme des courbures de deux sections normales rectangulaires quelconques est constante et égale à la somme des courbures des sections normales principales.* La quantité constante $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right)$ s'appelle *courbure moyenne* de la surface au point considéré.

Lignes minima.

3. En chaque point d'une surface, il y a trois couples de directions remarquables : les droites isotropes du plan tangent, définies par $\Phi(du, dv) = 0$; les directions asymptotiques de l'indicatrice $\Psi(du, dv) = 0$, et les directions des sections principales.

Considérons les directions isotropes, et cherchons s'il existe sur la surface des courbes tangentes en chacun de leurs points à une direction isotrope ; ceci revient à intégrer l'équation

$$\Phi(du, dv) = 0,$$

et on obtient ainsi les *courbes minima.* L'équation précédente se décompose en deux équations de premier ordre, donc *il y a deux familles de courbes minima et par tout point de la surface passe en général une courbe de chaque famille.* Ces courbes sont imaginaires ; on a le long de chacune d'elles

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0;$$

c'est pourquoi on les appelle aussi lignes de longueur nulle. Si on les prend pour lignes coordonnées, l'équation $\Phi(du, dv) = 0$ devant alors être vérifiée pour $du = 0$, $dv = 0$, on a

$$\mathrm{E} = 0, \quad \mathrm{G} = 0, \quad \text{et} \quad ds^2 = 2\mathrm{F}\,du\,dv.$$

En général les deux systèmes de lignes minima sont distincts. Pour qu'ils soient confondus, il faut que

$$\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \mathrm{H}^2 = 0,$$

dans ce cas, on a $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2 = 0$, et les formules fondamentales ne s'appliquent plus. Pour étudier la nature d'une telle surface considérons le plan tangent :

$$\mathrm{A}(\mathrm{X} - x) + \mathrm{B}(\mathrm{Y} - y) + \mathrm{C}(\mathrm{Z} - z) = 0;$$

ce plan est alors tangent à un cône isotrope, c'est un *plan isotrope. Tous les plans tangents à la surface sont isotropes.* Cherchons l'équation générale des plans isotropes. Soit

$$ax + by + cz + d = 0$$

nous avons la condition

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

ou

$$a^2 + b^2 = -c^2,$$
$$(a + ib)\,(a - ib) = -c^2.$$

Posons

$$a + ib = tc, \qquad a - ib = -\frac{1}{t}\,c,$$

ou

$$a + ib - tc = 0, \qquad ta - ibt + c = 0;$$

de ces deux relations nous tirons

$$\frac{a}{1 - t^2} = \frac{ib}{-(1 + t^2)} = \frac{c}{-2t},$$

ou

$$\frac{a}{1 - t^2} = \frac{b}{i(1 + t^2)} = \frac{c}{-2t};$$

d'où l'équation générale des plans isotropes

$$(1) \qquad (1 - t^2)x + i(1 + t^2)y - 2tz + 2w = 0.$$

Un plan isotrope dépend de deux paramètres. La surface considérée est l'enveloppe de plans isotropes ; si ces plans dépendent de deux paramètres, elle se réduit au cercle imaginaire à l'infini. Supposons alors que w soit fonction de t par exemple ; le plan tangent ne dépendant que d'un paramètre, la surface est développable, c'est une *développable isotrope*. Cherchons son arête de rebroussement. Différentions l'équation (1) deux fois par rapport à t. Nous avons

$$(2) \qquad -tx + ity - z + w' = 0$$
$$(3) \qquad -x + iy + w'' = 0$$

les équations (1), (2), (3) définissent l'arête de rebroussement ; (3) donne

$$x - iy = w'',$$

(2) s'écrit

$$z = -t(x - iy) + w' = w' - tw'',$$

et (1)

$$x + iy = t^2(x - iy) + 2tz - 2w = t^2 w'' + 2t(w' - tw'') - 2w$$

d'où, pour les équations de l'arête de rebroussement :

$$(4) \qquad x - iy = w'', \qquad x + iy = -2w + 2tw' - t^2 w'', \qquad z = w' - tw''.$$

Nous en tirons

$$d(x - iy) = w''' \, dt, \qquad d(x + iy) = -t^2 w''' \, dt, \qquad dz = -tw''' \, dt;$$

d'où

$$d(x - iy) \, d(x + iy) = -t^2 (w''')^2 \, dt^2 = -dz^2,$$

ou

$$d(x - iy) \, d(x + iy) + dz^2 = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0;$$

c'est une courbe minima. *L'arête de rebroussement d'une développable isotrope est une courbe minima.*

Réciproquement, considérons une courbe minima. Nous avons la relation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Différentions

$$dx \, d^2x + dy \, d^2y + dz \, d^2z = 0,$$

mais l'identité de Lagrange nous donne

$$\sum dx^2 \sum (d^2x)^2 - \left(\sum dx \, d^2x\right)^2 = \sum (dy \, d^2z - dz \, d^2y)^2 = 0,$$

ou $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ désignant les coefficients du plan osculateur

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = 0.$$

Le plan osculateur en un point d'une courbe minima est isotrope. Toute courbe minima peut être considérée comme l'arête de rebroussement d'une développable isotrope.

Il en résulte que cette arête de rebroussement est la courbe minima la plus générale, et que les coordonnées d'un point d'une courbe minima quelconque sont données par les formules (4), ou w est une fonction arbitraire de t.

Lignes asymptotiques.

4. Si nous cherchons maintenant les courbes d'une surface tangentes en chacun de leurs points à une asymptote de l'indicatrice, nous sommes ramenés à intégrer l'équation

$$\Psi(du, dv) = 0,$$

et nous obtenons les *lignes asymptotiques*. Comme précédemment, nous voyons qu'*il y a deux familles de lignes asymptotiques, et par tout point de la surface passe en général une asymptotique de chaque famille*.

L'équation différentielle précédente s'écrit

$$\sum \mathrm{A}\, d^2x = 0,$$

on a d'ailleurs

$$\sum \mathrm{A}\, dx = 0;$$

mais $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont les coefficients du plan tangent à la surface ; les équations précédentes montrent qu'il contient les directions dx, dy, dz et d^2x, d^2y, d^2z, donc coïncide avec le plan osculateur à la courbe ; donc *les lignes asymptotiques sont telles que le plan osculateur en chacun de leurs points soit tangent à la surface*. En particulier, *toute génératrice rectiligne d'une surface est une ligne asymptotique*, car le plan osculateur en un point d'une droite étant indéterminé, peut être considéré comme coïncident avec le plan tangent en ce point à la surface. *Si donc une surface est réglée, un des systèmes de lignes asymptotiques est constitué par les génératrices rectilignes.*

Si nous prenons les lignes asymptotiques pour courbes coordonnées, nous aurons

$$\mathrm{E}' = \mathrm{G}' = 0$$

et

$$\Psi(du, dv) = 2\mathrm{F}'\, du\, dv.$$

Les lignes asymptotiques sont réelles aux points où la surface est à courbures opposées, imaginaires aux points où elle est convexe. Elles sont en général distinctes, et distinctes aussi des lignes minima. Nous allons examiner les cas d'exception.

1°. *Les lignes asymptotiques sont confondues.* Prenons l'équation de la surface sous la forme

$$\mathrm{Z} = f(x, y) :$$

nous avons $\mathrm{E}'\mathrm{G}' - \mathrm{F}^2 = 0$, condition qui se réduit ici à

$$rt - s^2 = 0;$$

tous les points de la surface doivent être paraboliques. L'équation différentielle précédente peut s'écrire

$$dp\, dx + dq\, dy = 0.$$

Elle montre que si l'une des différentielles dp, dq est nulle, l'autre est aussi nulle, donc p, q sont fonctions l'un de l'autre. Le plan tangent en un point s'écrit

$$p(\mathrm{X}-x)+q(\mathrm{Y}-y)-(\mathrm{Z}-z)=0,$$

ou

$$p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}-\mathrm{Z}=px+qy-z.$$

Mais

$$d(px+qy-z)=x\,dp+y\,dq$$

et nous voyons que si $dp=0$, puisque $dq=0$, on a en même temps $d(px+qy-z)=0$, donc $px+qy-z$ est fonction de p, de même que q, et alors le plan tangent ne dépend que d'un seul paramètre, et la surface est développable. La réciproque est évidente, car si l'équation $p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}-\mathrm{Z}=px+qy-z$ ne dépend que d'un paramètre θ, dp et dq sont proportionnels à $d\theta$, et les deux formes linéaires $dp=r\,dx+s\,dy$, $dq=s\,dx+t\,dy$ ne sont pas indépendantes. On a donc bien

$$\begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix}=rt-s^2=0.$$

Donc *les surfaces à lignes asymptotiques doubles sont les surfaces développables, et les lignes asymptotiques doubles sont les génératrices rectilignes. Pour les développables isotropes, les lignes asymptotiques doubles sont confondues avec les lignes minima doubles, qui sont les génératrices rectilignes isotropes.*

Remarque. Pour les surfaces développables, l'arête de rebroussement ayant son plan osculateur tangent à la surface doit être considérée comme une ligne asymptotique. Son équation est en effet une intégrale singulière de l'équation différentielle des lignes asymptotiques.

2°. *Une famille de lignes asymptotiques est confondue avec une famille de lignes minima.* Écartons le cas des développables isotropes, qui vient d'être examiné. Prenons les lignes minima comme courbes coordonnées, $\mathrm{E}=0$, $\mathrm{G}=0$, et si nous supposons que la famille $v=$ const. constitue une famille d'asymptotiques, $dv=0$ doit être solution de $\Psi(du,dv)=0$, donc

$$\mathrm{E}'=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}=0.$$

Il existe donc entre les éléments des lignes de ce déterminant une même relation linéaire et homogène. On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\mathrm{M}\,\dfrac{\partial x}{\partial u}+\mathrm{N}\,\dfrac{\partial x}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}=\mathrm{M}\,\dfrac{\partial y}{\partial u}+\mathrm{N}\,\dfrac{\partial y}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\mathrm{M}\,\dfrac{\partial z}{\partial u}+\mathrm{N}\,\dfrac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

Multiplions respectivement par $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ et ajoutons. Le coefficient de M est $\mathrm{E} = 0$, le premier membre est $\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} = 0$, donc $\mathrm{NF} = 0$, et comme $\mathrm{F} \neq 0$, $\mathrm{N} = 0$, et nous avons :

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial u}} = \mathrm{M},$$

les courbes $v = \text{const.}$ sont des droites, et comme ce sont des lignes minima, ce sont des droites isotropes. Et réciproquement si les courbes $v = \text{const.}$ sont des droites, on a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{M}\,\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \mathrm{M}\,\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \mathrm{M}\,\frac{\partial z}{\partial u};$$

et par suite

$$\sum \mathrm{A}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{M}\sum \mathrm{A}\,\frac{\partial x}{\partial u} = 0$$

les courbes $v = \text{const.}$ qui sont des droites minima sont des lignes asymptotiques. Donc *les surfaces qui ont une famille d'asymptotiques confondue avec une famille de lignes minima sont des surfaces réglées à génératrices isotropes, et ces génératrices sont les asymptotiques confondues avec les courbes minima.*

3°. *Les deux systèmes d'asymptotiques sont des courbes minima.* En prenant toujours les lignes minima comme courbes coordonnées, il faut que l'équation $\Psi(du, dv) = 0$ soit satisfaite pour $du = 0$, $dv = 0$, il faut donc que $\mathrm{E}' = \mathrm{G}' = 0$. Alors les formes quadratiques Φ et Ψ sont proportionnelles. Il en est de même avec un système de coordonnées quelconques et on a

$$\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}.$$

L'indicatrice en un point quelconque est un cercle, *tous les points de la surface sont des ombilics.* En reprenant le calcul comme précédemment, on verra que la surface admet deux systèmes de génératrices rectilignes isotropes. *C'est une sphère.*

Surfaces minima.

5. Ce dernier cas nous a conduit à étudier la surface telle que l'indicatrice soit toujours un cercle. Examinons maintenant *le cas où cette indicatrice est toujours une hyperbole équilatère.* Ceci revient à chercher les surfaces pour lesquelles les lignes asymptotiques sont orthogonales. Il faut pour cela que l'on ait

$$\mathrm{EG}' + \mathrm{GE}' - 2\mathrm{FF}' = 0,$$

ou

$$\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2} = 0.$$

Les rayons de courbure en chaque point sont égaux et de signes contraires ; la surface est dite une *surface minima.*

Prenons pour coordonnées les lignes minima. Alors $\mathrm{E} = 0$, $\mathrm{G} = 0$, et

$$ds^2 = 2\mathrm{F}\, du\, dv;$$

la condition précédente donne $\mathrm{F}' = 0$, et

$$\Psi(du, dv) = \mathrm{E}'\, du^2 + \mathrm{G}'\, dv^2.$$

Mais on a

$$\mathrm{F}' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Il existe donc une même relation linéaire et homogène entre les éléments des lignes. On a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} &= \mathrm{M}\, \frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{N}\, \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} &= \mathrm{M}\, \frac{\partial y}{\partial u} + \mathrm{N}\, \frac{\partial y}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} &= \mathrm{M}\, \frac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{N}\, \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement par $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}$ et ajoutons. Le premier membre est $\dfrac{1}{2}\, \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} = 0$; le coefficient de M est $\mathrm{E} = 0$; nous avons donc $\mathrm{NF} = 0$, donc $\mathrm{N} = 0$. De même en multipliant par $\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ et ajoutant, on trouvera $\mathrm{M} = 0$; donc on a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Ce qui donne

$$x = f(u) + \varphi(v), \qquad y = g(u) + \psi(v), \qquad z = h(u) + \chi(v);$$

les surfaces représentées par des équations de cette forme sont dites *surfaces de translation. Elles peuvent être engendrées de deux façons différentes par la translation d'une courbe de forme invariable dont un point décrit une autre courbe.* Considérons en effet sur la surface les quatre points $\mathrm{M}_0(u_0, v_0)$, $\mathrm{M}_1(u, v_0)$, $\mathrm{M}_2(u_0, v)$, $\mathrm{M}(u, v)$. D'après les formules précédentes ces points sont les sommets d'un parallélogramme. Si, laissant v_0 fixe, on fait varier u, le point M_1 décrit une courbe Γ de la surface ; de même si, laissant u_0 fixe, on fait varier v, le point M_2 décrit une autre courbe Γ' de la surface. On peut donc considérer la surface comme engendrée par la courbe Γ animée d'un mouvement de translation dans lequel le point M_2 décrit la courbe Γ', ou par la courbe Γ' animée d'un mouvement de translation dans lequel le point M_1 décrit la courbe Γ.

Pour les surfaces minima, les six fonctions $f, g, h, \varphi, \psi, \chi$ ne sont pas quelconques. Elles doivent satisfaire aux relations

$$\mathrm{E} = f'^2 + g'^2 + h'^2 = 0, \qquad \mathrm{G} = \varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2 = 0;$$

il en résulte que la courbe

$$x = f(u), \qquad y = g(u), \qquad z = h(u)$$

est une courbe minima, et si nous nous reportons aux équations générales d'une courbe minima, nous voyons que nous pouvons écrire, F étant une fonction quelconque de u

$$\begin{aligned} f(u) - ig(u) &= \mathrm{F}''(u), \\ f(u) + ig(u) &= -2\mathrm{F}(u) + 2u\mathrm{F}'(u) - u^2\mathrm{F}''(u), \\ h(u) &= \mathrm{F}'(u) - u\mathrm{F}''(u). \end{aligned}$$

De même la courbe

$$x = \varphi(v), \qquad y = \psi(v), \qquad z = \chi(v)$$

étant une courbe minima, on aura, Φ étant une fonction quelconque de v,

$$\begin{aligned} \varphi(v) - i\psi(v) &= \Phi''(v), \\ \varphi(v) + i\psi(v) &= -2\Phi(v) + 2v\Phi'(v) - v^2\Phi''(v), \\ \chi(v) &= \Phi'(v) - v\Phi''(v); \end{aligned}$$

d'où les coordonnées d'un point de la surface minima la plus générale

$$\begin{aligned} x + iy &= -2\mathrm{F}(u) + 2u\mathrm{F}'(u) - u^2\mathrm{F}''(u) - 2\Phi(v) + 2v\Phi'(v) + v^2\Phi''(v), \\ x - iy &= \mathrm{F}''(u) + \Phi''(v), \\ z &= \mathrm{F}'(u) - u\mathrm{F}''(u) + \Phi'(v) - v\Phi''(v). \end{aligned}$$

Dans le cas où l'équation de la surface est mise sous la forme

$$z = f(x, y),$$

l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima est

$$(1 + p^2)\, t + (1 + q^2)\, r + 2pq\, s = 0.$$

Lignes courbure.

6. Les *lignes de courbure* sont les lignes tangentes en chacun de leurs points aux directions principales ou axes de l'indicatrice. Ce sont les intégrales de l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial\, du}\,\frac{\partial \Psi}{\partial\, dv} - \frac{\partial \Phi}{\partial\, dv}\,\frac{\partial \Psi}{\partial\, du} = 0,$$

les directions principales étant conjuguées par rapport aux directions isotropes et aux directions asymptotiques. Si ces deux couples constituent quatre directions distinctes, les directions principales seront aussi distinctes et distinctes des précédentes. Il en résulte qu'il n'y aura pas d'autres cas singuliers pour les lignes de courbure que ceux déjà rencontrés pour les lignes minima et les lignes asymptotiques.

1°. *Surfaces réglées non développables à génératrices isotropes* (*la sphère exceptée*). Une famille de lignes minima est constituée par des lignes asymptotiques. Prenant les lignes minima comme coordonnées, nous avons

$$\Phi = 2\mathrm{F}\, du\, dv;$$

prenons les lignes $u =$ const. confondues avec les asymptotiques, $du = 0$ doit annuler Ψ ; donc

$$\Psi = \mathrm{E}'\, du^2 + 2\mathrm{F}'\, du\, dv;$$

l'équation différentielle des lignes de courbure est

$$\mathrm{F}\, dv\, \mathrm{F}'\, du - \mathrm{F}\, du(\mathrm{E}'\, du + \mathrm{F}'\, dv) = 0,$$

ou

$$\mathrm{E}'\mathrm{F}\, du^2 = 0.$$

Les lignes de courbure sont doubles, ce sont les génératrices rectilignes isotropes qui sont déjà lignes minima et asymptotiques.

2°. *Sphère.* Φ, Ψ sont proportionnels, l'équation différentielle est identiquement vérifiée. *Sur la sphère toutes les lignes sont lignes de courbure.*

3°. *Surfaces développables non isotropes.* Prenons les génératrices rectilignes comme courbes $u =$ const., ce sont des lignes asymptotiques doubles, nous avons

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2,$$
$$\Psi = \mathrm{E}'\, du^2;$$

l'équation différentielle des lignes de courbure est

$$(\mathrm{F}\, du + \mathrm{G}\, dv)\, \mathrm{E}'\, du = 0.$$

Les lignes de courbure sont les génératrices rectilignes, qui sont déjà lignes asymptotiques, et leurs trajectoires orthogonales.

4°. *Surfaces développables isotropes.* Prenant pour courbe $v =$ const. les lignes minima doubles confondues avec les lignes asymptotiques doubles, nous avons

$$\Phi = \mathrm{E}\, du^2, \qquad \Psi = \mathrm{E}'\, du^2.$$

L'équation aux lignes de courbure est identiquement vérifiée. *Sur les développables isotropes toutes les lignes sont lignes de courbure.*

Remarque. Pour un plan, les courbes minima sont des droites ; et toute ligne du plan est asymptotique et ligne de courbure.

Courbure géodésique.

7. Examinons maintenant la deuxième formule fondamentale

$$\frac{\sin\theta}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{H}\,ds^2}\left[\mathrm{H}^2\,(du\,d^2v - dv\,d^2u) - \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}du^2 + \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}du\,dv + \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)dv^2 & \mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv \\ \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)du^2 + \dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}du\,dv + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}dv^2 & \mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv \end{vmatrix}\right];$$

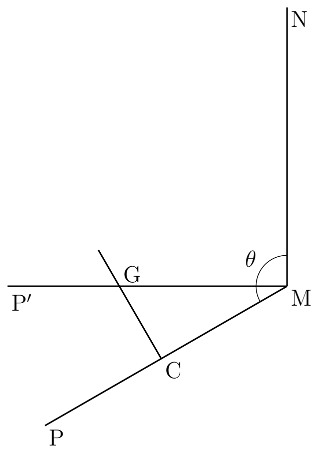
θ est l'angle de la normale principale avec la normale à la surface. Soit C le centre de courbure. Considérons la droite polaire, qui rencontre le plan tangent en G, nous avons

$$\mathrm{MC} = \mathrm{MG}\cos\left(\theta - \tfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{MG}\sin\theta.$$

MG est ce qu'on appelle le *rayon de courbure géodésique* R_g. On a

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_g \sin\theta.$$

Le point G est le *centre de courbure géodésique. La projection du centre de courbure géodésique sur la normale principale est le centre de courbure.* L'inverse du rayon de courbure géodésique s'appelle *courbure géodésique.* Son expression ne dépend que de E, F, G et de leurs dérivées ; *la courbure géodésique se conserve quand on déforme la surface.*



Cherchons s'il existe des courbes de la surface dont le rayon de courbure géodésique soit constamment infini. De telles courbes sont appelées lignes géodésiques. Alors $\dfrac{\sin\theta}{\mathrm{R}}$ est constamment nul, et comme R n'est pas constamment infini, $\sin\theta = 0$. *Le plan osculateur est normal à la surface en chaque point de la courbe.* Les lignes géodésiques sont définies par une équation différentielle de la forme

$$v'' = \Phi(u, v, v').$$

De l'étude des équations de cette forme il résulte qu'*il y a une ligne géodésique et une seule passant par chaque point de la surface et tangente en ce point à une direction donnée du plan tangent. Il y en a une et une seule joignant deux points donnés dans un domaine suffisamment petit.*

Prenons pour lignes coordonnées les lignes minima. Alors $\mathrm{E} = \mathrm{G} = 0$ et $\mathrm{H}^2 = -\mathrm{F}^2$. L'équation différentielle des lignes géodésiques devient

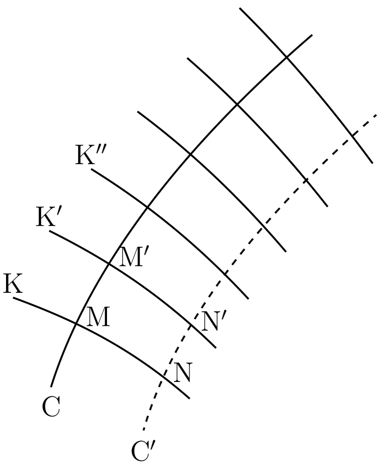
$$-\mathrm{F}^2(du\,d^2v - dv\,d^2u) - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}dv^2 & \mathrm{F}\,dv \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}du^2 & \mathrm{F}\,du \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$du\,d^2v - dv\,d^2u + \frac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial v}\,du\,dv^2 - \frac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial u}\,du^2\,dv = 0$$

on voit qu'elle est vérifiée pour $du = 0$, $dv = 0$. Ainsi *les lignes minima sont des lignes géodésiques.*

Remarque. Si le plan osculateur se confond avec le plan tangent, le centre de courbure se confond avec le centre de courbure géodésique ; et si en particulier on considère un plan *dans ce plan la courbure géodésique n'est autre que la courbure.* Il en résulte que *les lignes géodésiques du plan sont les droites de ce plan*, ce qu'on vérifie facilement par le calcul.



Définition directe de la courbure géodésique. Considérons sur la surface une courbe (C) et une famille de courbes (K) orthogonales à (C). Sur chaque courbe (K) portons à partir du point M où elle rencontre la courbe (C) une longueur d'arc constante MN. Pour chaque valeur de cette constante nous obtenons une courbe (C′) lieu du point N. Prenons comme courbes coordonnées les courbes (C), (C′), …, (v = const.), la courbe (C) étant $v = 0$, et les courbes (K), (u = const.). Alors v ne sera autre que la longueur d'arc MN. Nous avons

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2.$$

La courbe $v = 0$ est orthogonale à toutes les courbes (K), donc on a, quel que soit u

$$\mathrm{F}(u, 0) = 0;$$

v représentant l'arc MN, on a $ds^2 = dv^2$, d'où $\mathrm{G} = 1$, et alors

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + dv^2.$$

Nous pouvons de même supposer que sur la courbe (C), u représente l'arc. Alors pour $v = 0$, on a $ds = du$, donc

$$\mathrm{E}(u, 0) = 1,$$

et pour cette courbe (C) on a

$$\mathrm{H}^2 = \mathrm{E}\,\mathrm{G} - \mathrm{F}^2 = 1,$$

d'où $\mathrm{H} = 1$. Nous avons alors

$$\frac{\sin\theta}{\mathrm{R}} = -\frac{1}{ds^2}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\,du^2 & \mathrm{E}\,du \\ \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)du^2 & \mathrm{F}\,du \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}.$$

Pour la courbe (C′) nous aurons

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2,$$

d'où

$$ds = \sqrt{\mathrm{E}}\,du;$$

prenons la dérivée logarithmique par rapport à v

$$\frac{\partial \log ds}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{E}}} = \frac{1}{2\mathrm{E}} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}.$$

Si on considère la courbe (C), E = 1, et on a pour cette courbe

$$\frac{\partial \log ds}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v},$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{R}_g} = \frac{\sin\theta}{\mathrm{R}} = -\frac{\partial \log ds}{\partial v},$$

ce qui donne une définition de la courbure géodésique n'empruntant aucun élément extérieur à la surface.

Propriétés des géodésiques.

Supposons en particulier que toutes les courbes (K) soient des géodésiques. Avec les mêmes conventions que précédemment, $du = 0$ doit être une solution de l'équation différentielle des lignes géodésiques, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} & \mathrm{F} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} = 0;$$

donc F est une fonction de u seulement, et comme $\mathrm{F} = 0$ pour $v = 0$, F est identiquement nul, et on a

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + dv^2;$$

et alors toutes les courbes (C) coupent orthogonalement les géodésiques (K). Donc *si nous considérons une courbe* (c), *si nous menons en chaque point de* (c) *la géodésique qui lui est orthogonale, et si nous portons sur chacune de ces géodésiques un arc constant, le lieu des extrémités de ces arcs est une courbe* (c') *normale aux géodésiques.* Nous obtenons ainsi les *courbes parallèles* sur une surface quelconque.

Réciproquement, si nous considérons une famille de géodésiques et leurs trajectoires orthogonales, ces trajectoires déterminent sur les géodésiques des longueurs d'arc égales. Toujours avec les mêmes hypothèses, les courbes $u =$ const. et $v =$ const. étant orthogonales, on a $\mathrm{F} = 0$. Les $u =$ const. étant des géodésiques, nous avons

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\, dv^2 & 0 \\ \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\, dv^2 & \mathrm{G} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{G} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\, dv^2 = 0.$$

$G \neq 0$, sans quoi les courbes $u =$ const. seraient des courbes minima, donc $\dfrac{\partial G}{\partial u} = 0$ et $G = \varphi(v)$. Calculons alors l'arc d'une courbe (K) compris entre la courbe $v = v_0$ et la courbe $v = v_1$. Nous avons

$$ds^2 = G\,dv^2 = \varphi(v)\,dv^2,$$

et

$$s = \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{\varphi(v)}\,dv;$$

s est indépendant de u, l'arc est le même sur toutes les géodésiques.

Si on prend encore pour v l'arc sur les courbes $u =$ const. on a

$$ds^2 = E\,du^2 + dv^2,$$

et *cette forme est caractéristique du système de coordonnées* employé, *constitué par une famille de géodésiques et leurs trajectoires orthogonales.*

Prenons alors sur la surface deux points voisins A, B. Il existe une ligne géodésique et une seule dans le domaine de ces deux points et joignant ces deux points. Considérons une famille de géodésiques voisines ne se coupant pas dans le domaine, et leurs trajectoires orthogonales. Prenons-les comme courbes coordonnées. Considérons une ligne quelconque de la surface allant de A à B, soit

$$u = f(v).$$

Si A a pour coordonnées u_0, v_0 et B, u_0, v_1, la longueur de l'arc AB de cette ligne est

$$\int_{v_0}^{v_1} \sqrt{E\,du^2 + dv^2} = \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{E\big(f(v), v\big)\,f'^2(v) + 1}\,dv.$$

Cette intégrale est visiblement minima si $f'(v) = 0$, c'est-à-dire si la courbe joignant A, B est la géodésique. Ainsi donc, *dans un domaine suffisamment petit entourant deux points d'une surface, la géodésique est le plus court chemin entre ces deux points.*

Torsion géodésique.

8. Voyons enfin la troisième formule fondamentale

$$\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{H^2\,ds^2} \begin{vmatrix} E'\,du + F'\,dv & F'\,du + G'\,dv \\ E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \end{vmatrix}.$$

Si θ est constant, et en particulier constamment nul, la formule précédente donne la torsion ; elle donne donc en particulier la torsion d'une géodésique. L'expression précédente ne dépend que de $\dfrac{du}{dv}$, c'est-à-dire de la direction de la tangente. Considérons alors sur la surface une courbe (c) et un point M. Il existe une géodésique tangente à (c) au point M et $\dfrac{1}{T} - \dfrac{d\theta}{ds}$ est la torsion de cette géodésique. C'est pourquoi $\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds}$ s'appelle *torsion géodésique.* On voit ainsi que *la torsion géodésique en un point d'une courbe est la torsion de la géodésique tangente en ce point à la courbe donnée.* Posons

$$\frac{1}{\mathrm{T}_g} = \frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds};$$

T_g est le *rayon de torsion géodésique.* Contrairement au rayon de courbure géodésique, il change dans la déformation des surfaces.

La formule précédente montre que la torsion géodésique est nulle si la direction du, dv est une direction principale; *la torsion géodésique est nulle pour toute courbe tangente à une ligne de courbure.* Il en résulte que *les lignes de courbure ont une torsion géodésique constamment nulle* (*Théorème de Lancret*).

$\frac{1}{\mathrm{T}_g}$ est le quotient de deux trinômes du deuxième degré en du, dv, on peut donc étudier sa variation. Prenons pour courbes coordonnées les lignes de courbure, elles sont conjuguées et rectangulaires, donc $\mathrm{F} - \mathrm{F}' = 0$, et

$$\frac{1}{\mathrm{T}_g} = \frac{1}{\mathrm{H}^2\, ds^2}(\mathrm{E}'\mathrm{G} - \mathrm{G}'\mathrm{E})\, du\, dv = \left(\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}} - \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}\right)\frac{du}{ds}\,\frac{dv}{ds}.$$

Si nous revenons aux notations employées au N° 1 pour l'étude de la courbure normale, les coefficients de direction de la tangente dans le plan tangent sont

$$\lambda = \sqrt{\mathrm{E}}\,\frac{du}{ds}, \qquad \mu = \sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dv}{ds},$$

et alors

$$\frac{1}{\mathrm{T}_g} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\left(\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}} - \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}\right)\lambda\mu;$$

les rayons de courbure principaux sont

$$\frac{1}{\mathrm{R}_1} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\,\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}}, \qquad \frac{1}{\mathrm{R}_2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\,\frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}},$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{T}_g} = \left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right)\lambda\mu,$$

d'où la *formule d'Ossian Bonnet*, analogue à la formule d'Euler

$$\frac{1}{\mathrm{T}_g} = \left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right)\sin\varphi\,\cos\varphi.$$

Théorèmes de Joachimsthal.

Considérons une courbe (c) intersection de deux surfaces; le plan normal à (c) en l'un de ses points M contient la normale principale à la courbe et les normales aux deux surfaces. Soit V l'angle des normales MN, MN′; θ, θ' leurs angles avec MP.

Nous avons

$$\mathrm{V} = \theta' - \theta;$$

mais
$$\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\mathrm{T}_g} \qquad \frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{d\theta'}{ds} = \frac{1}{\mathrm{T}'_g}$$
d'où en retranchant
$$\frac{d\mathrm{V}}{ds} = \frac{1}{\mathrm{T}_g} - \frac{1}{\mathrm{T}'_g}.$$
Supposons alors que (c) soit ligne de courbure des deux surfaces ; $\frac{1}{\mathrm{T}_g}$ et $\frac{1}{\mathrm{T}'_g}$ sont tous deux nuls, $\frac{d\mathrm{V}}{ds} = 0$, V est constant. D'où les *Théorèmes de Joachimsthal : Si 2 surfaces se coupent suivant une ligne de courbure, leur angle est constant tout le long de cette ligne*, et la même formule montre immédiatement que réciproquement : *si deux surfaces se coupent sous un angle constant, et si l'intersection est ligne de courbure pour l'une des surfaces, elle est aussi ligne de courbure pour l'autre.* Sur un plan ou sur une sphère, toutes les lignes sont lignes de courbure ; donc *si une ligne de courbure d'une surface est plane ou sphérique, le plan ou la sphère qui la contient coupe la surface sous un angle constant, et réciproquement, si un plan ou une sphère coupe une surface sous un angle constant l'intersection est une ligne de courbure de la surface.* Enfin si un cercle est ligne de courbure d'une surface, il y a une sphère passant par ce cercle qui est tangente à la surface en un point du cercle ; et, par suite, en tous les points du cercle. Donc toute *ligne de courbure circulaire est la courbe de contact d'une sphère inscrite ou circonscrite à la surface.*

EXERCICES.

12. On considère la surface
$$x = \frac{c^2-b^2}{bc}\,\frac{uv}{u+v}, \quad y = \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b}\,\frac{v\sqrt{b^2-u^2}}{u+v}, \quad z = \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c}\,\frac{u\sqrt{v^2-c^2}}{u+v};$$
déterminer ses lignes de courbure, et calculer les rayons de courbure principaux.

13. On considère la surface
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int (1-u^2)\, f(u)\, du + \frac{1}{2}\int (1-v^2)\,\varphi(v)\, dv,\\ y &= \frac{1}{2}\int (1+u^2)\, f(u)\, du - \frac{1}{2}\int (1+v^2)\,\varphi(v)\, dv,\\ z &= \int u f(u)\, du + \int v\varphi(v)\, dv. \end{aligned}$$
Calculer les rayons de courbures principaux et les coordonnées des centres de courbures principaux. Former l'équation différentielle des lignes de courbure et des lignes asymptotiques. Étudier les lignes de courbure en prenant
$$f(u) = \frac{2m^2}{(m^2+u^2)^2}, \qquad \varphi(v) = \frac{2m^2}{(m^2+v^2)^2},$$
et en introduisant de nouvelles coordonnées par les formules
$$u = m\,\mathrm{tg}\,\frac{\lambda+i\mu}{2}, \qquad v = m\,\mathrm{tg}\,\frac{\lambda-i\mu}{2}.$$

14. Soient, en coordonnées rectangulaires, les équations

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}e^u \cos(v-\alpha) + \frac{1}{2}e^{-u}\cos(v+\alpha), \\ y &= \frac{1}{2}e^u \sin(v-\alpha) + \frac{1}{2}e^{-u}\sin(v+\alpha), \\ z &= u\cos\alpha + v\sin\alpha. \end{aligned}$$

1°. Pour chaque valeur de α, ces formules définissent une surface S_α. Indiquer un mode de génération de cette surface. Que sent en particulier S_0 et $S_{\frac{\pi}{2}}$?

2°. On considère deux de ces surfaces S_α et S_β, et on les fait correspondre point par point de manière que les plans tangents aux points correspondants soient parallèles. Démontrer que les tangentes à deux courbes correspondantes, menées en deux points homologues, font un angle constant.

3°. Chercher les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de S_α et trouver une propriété géométrique des courbes auxquelles elles correspondent sur S_β, dans la transformation précédente. Qu'arrive-t-il pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$?

15. Chercher les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont les courbes de contact des cônes circonscrits ayant leurs sommets sur Oz. Quelles sont les autres lignes de courbure ?

16. Étudier les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont situées sur des sphères concentriques. Que peut-on dire des lignes de courbure de l'autre système ?

17. Si les courbes coordonnées $u =$ const., $v =$ const. sur une surface S sont les lignes asymptotiques de cette surface, et si l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à S, en un point quelconque de S, montrer qu'il existe une fonction θ telle que l'on ait

$$\begin{aligned} dx &= \theta\left[m\left(\frac{\partial n}{\partial u}du - \frac{\partial n}{\partial v}dv\right) - n\left(\frac{\partial m}{\partial u}du - \frac{\partial m}{\partial v}dv\right)\right], \\ dy &= \theta\left[n\left(\frac{\partial l}{\partial u}du - \frac{\partial l}{\partial v}dv\right) - l\left(\frac{\partial n}{\partial u}du - \frac{\partial n}{\partial v}dv\right)\right], \\ dz &= \theta\left[l\left(\frac{\partial m}{\partial u}du - \frac{\partial m}{\partial v}dv\right) - m\left(\frac{\partial l}{\partial u}du - \frac{\partial l}{\partial v}dv\right)\right]. \end{aligned}$$

Calculer, en partant de ces formules, le ds^2 de la surface, l'équation des lignes de courbure, l'équation aux rayons de courbure principaux. Calculer la torsion des lignes asymptotiques, et montrer qu'elle s'exprime au moyen des rayons de courbure principaux seulement.

CHAPITRE IV.

LES SIX INVARIANTS — LA COURBURE TOTALE.

Les six invariants.

1. Dans l'étude des courbes tracées sur une surface (S) ne sont intervenus que les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales :

$$\Phi(du, dv) = ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$
$$\Psi(du, dv) = \sum \mathrm{A}\,d^2x = \mathrm{E}'\,du^2 + 2\mathrm{F}'du\,dv + \mathrm{G}'\,dv^2,$$

et les différentielles de u, v, considérées comme les fonctions d'une variable indépendante t qui correspondent à chaque courbe particulière considérée.

Si l'on déplace la surface (S) dans l'espace, sans la déformer, et sans changer les coordonnées superficielles u, v employées, ces formes quadratiques demeureront les mêmes, de sorte que *leurs six coefficients* $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$, $\mathrm{E}', \mathrm{F}', \mathrm{G}'$ *sont six invariants différentiels, pour le groupe des mouvements dans l'espace*.

Cela résulte, pour la forme $ds^2 = \Phi(du, dv)$, de ce qu'elle représente le carré de la différentielle d'un arc qui reste le même dans les conditions énoncées.

Dès lors $\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}$ est un invariant, et la formule

$$\Psi(du, dv) = \mathrm{H}\,\Phi(du, dv)\,\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}},$$

dont tous les facteurs du second membre sont invariants, montre que Ψ possède aussi la propriété d'invariance.

Il n'y a du reste aucune difficulté à vérifier, par un calcul direct, l'invariance des six coefficients sur les formules qui les définissent :

$$(1)\qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{E}, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{F}, \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{G},$$
$$(2)\qquad \sum \mathrm{A}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{E}', \qquad \sum \mathrm{A}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{F}', \qquad \sum \mathrm{A}\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \mathrm{G}',$$

ou l'on se rappelle que $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont les trois déterminants fonctionnels

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(u, v)}, \quad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(u, v)}, \quad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)}.$$

Rappelons enfin l'identité

$$\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2} = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}.$$

La forme de la surface définie par les six invariants.

Supposons maintenant que $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$, $\mathrm{E}', \mathrm{F}', \mathrm{G}'$ aient été calculés, en fonction de u, v, pour une surface (S) particulière

$$(3)\qquad x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v);$$

et considérons les équations (1), (2) comme un système d'équations aux dérivées partielles, où x, y, z sont les fonctions inconnues, u, v les variables indépendantes, et $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{E}', \mathrm{F}', \mathrm{G}'$ des fonctions données. En vertu de l'invariance que nous venons d'expliquer, ce système différentiel admettra comme intégrales, non seulement les fonctions (3), qui définissent (S), mais encore toutes les fonctions

$$(4)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha f + \alpha' g + \alpha'' h, \\ y = y_0 + \beta f + \beta' g + \beta'' h, \\ z = z_0 + \gamma f + \gamma' g + \gamma'' h, \end{cases}$$

qui définissent les surfaces obtenues en déplaçant (S) de toutes les manières possibles, lorsqu'on donne à x_0, y_0, z_0, toutes les valeurs constantes possibles, et à α, β, γ, α', β', γ', $\alpha'', \beta'', \gamma''$ toutes les valeurs constantes compatibles avec les conditions d'orthogonalité bien connues.

Cela donne donc des intégrales dépendant de six constantes arbitraires. Nous prouverons que le système (1), (2) n'en a pas d'autres ; ce que l'on pourra exprimer en disant que *la forme de la surface est entièrement définie par les six invariants* $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{E}', \mathrm{F}', \mathrm{G}'$.

On démontre dans la théorie des équations aux dérivées partielles que, dans tout système dont l'intégrale générale ne dépend que de constantes arbitraires, toutes les dérivées partielles d'un certain ordre peuvent s'exprimer en fonction des variables indépendantes et dépendantes et des dérivées d'ordre inférieur. Nous devons donc essayer de constater que cela a lieu pour notre système ; et commencer par différentier les équations (1). Les résultats obtenus peuvent s'écrire :

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}, & \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}, \\ \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}, & \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}, \\ \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}; & \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}; \end{cases}$$

et l'on voit qu'en associant ces équations aux équations (2), on obtiendra effectivement les expressions de toutes les dérivées du second ordre.

Pour faciliter ce calcul, nous introduirons les cosinus directeurs de la normale :

$$(6)\qquad l = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{H}}, \qquad m = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{H}}, \qquad n = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{H}};$$

et nous substituerons à la forme $\sum \mathrm{A}\, d^2x$ la forme

$$(7)\qquad \sum l\, d^2x = \frac{1}{\mathrm{H}} \sum \mathrm{A}\, d^2x = \mathrm{L}\, du^2 + 2\,\mathrm{M}\, du\, dv + \mathrm{N}\, dv^2$$

de sorte qu'on aura

$$(8)\qquad \mathrm{L} = \frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{H}}, \qquad \mathrm{M} = \frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{H}}, \qquad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{H}};$$

et que les équations (2) seront remplacées par

$$(9)\qquad \sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{L},\qquad \sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M},\qquad \sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \mathrm{N}.$$

Cela fait, si on pose :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \mathrm{L}'\,\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{L}''\,\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{L}'''l,\\
\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} &= \mathrm{L}'\,\frac{\partial y}{\partial u} + \mathrm{L}''\,\frac{\partial y}{\partial v} + \mathrm{L}'''m,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \mathrm{L}'\,\frac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{L}''\,\frac{\partial z}{\partial v} + \mathrm{L}'''n,
\end{aligned}$$

$\mathrm{L}', \mathrm{L}'', \mathrm{L}'''$ étant des coefficients à déterminer, on aura pour les calculer les conditions

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{EL}' + \mathrm{FL}'',\qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{FL}' + \mathrm{GL}'',\qquad \sum l\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{L}''';$$

d'où on conclut d'abord $\mathrm{L}''' = \mathrm{L}$; et ensuite, en se servant des formules (5), des équations qui donneront L' et L''.

En opérant de même pour les autres dérivées, on obtient les résultats suivants

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \mathrm{L}'\,\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{L}''\,\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{L}\,l,\\
\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \mathrm{M}'\,\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{M}''\,\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{M}\,l,\\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \mathrm{N}'\,\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{N}''\,\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{N}\,l,
\end{aligned}\right.$$

avec les équations auxiliaires :

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{EL}' + \mathrm{FL}'' &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}, & \mathrm{FL}' + \mathrm{GL}'' &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v},\\
\mathrm{EM}' + \mathrm{FM}'' &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}, & \mathrm{FM}' + \mathrm{GM}'' &= \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u},\\
\mathrm{EN}' + \mathrm{FN}'' &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}, & \mathrm{FN}' + \mathrm{GN}'' &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v},
\end{aligned}\right.$$

d'où on déduirait les valeurs des coefficients $\mathrm{L}', \mathrm{L}''$, $\mathrm{M}', \mathrm{M}''$, $\mathrm{N}', \mathrm{N}''$. On remarquera qu'elles ne dépendent que des coefficients $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ de l'élément linéaire $ds^2 = \Phi(du, dv)$, et des dérivées premières de ces coefficients.

Enfin, les mêmes équations (10) subsisteront pour les autres coordonnées y, z ; il n'y aura qu'à y laisser les mêmes coefficients, et à y remplacer la lettre x par la lettre y ou la lettre z, en même temps qu'on changera l en m ou en n.

Nous concluons de là que si on connaît, pour un système de valeurs de u, v, les valeurs de x, y, z et de leurs dérivées premières, on pourra calculer les valeurs de leurs dérivées secondes ; et, par des différentiations nouvelles, celles de toutes leurs dérivées d'ordre supérieur. Et par suite les développements en séries de

Taylor d'une intégrale quelconque ne peuvent contenir d'autres arbitraires que les valeurs initiales de

$$x,\ y,\ z,\quad \frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v},\quad \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v};$$

et encore celles-ci doivent être liées par les équations (1) ; et, lorsque ces valeurs initiales sont données, l'intégrale est entièrement déterminée.

Donc, pour prouver que (4) donne l'intégrale générale, il reste seulement à montrer que (4) peut satisfaire aux conditions initiales énoncées. Or, si nous introduisons les cosinus directeurs l', m', n' ; l'', m'', n'' des tangentes MU, MV aux deux courbes coordonnées qui passent par un point quelconque M de la surface, nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= l'\sqrt{\mathrm{E}}, & \frac{\partial y}{\partial u} &= m'\sqrt{\mathrm{E}}, & \frac{\partial z}{\partial u} &= n'\sqrt{\mathrm{E}},\\
\frac{\partial x}{\partial v} &= l''\sqrt{\mathrm{G}}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= m''\sqrt{\mathrm{G}}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= n''\sqrt{\mathrm{G}};
\end{aligned}$$

et les conditions (1) se réduiront à

$$\sum l'^2 = 1, \qquad \sum l''^2 = 1, \qquad \sum l'l'' = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{EG}}} = \cos\omega,$$

ω étant l'angle (MU, MV).

Les conditions initiales signifient donc que l'on se donne arbitrairement la position du point M, et la direction des tangentes MU, MV, sous la réserve que ces directions fassent entre elles le même angle qu'elles font au point correspondant de (S). Il y a donc bien une des positions de (S) qui satisfait à ces conditions, et notre résultat se trouve définitivement établi.

Remarque. Le raisonnement précédent serait en défaut, si les courbes coordonnées étaient les lignes minima (à cause de $\mathrm{E} = \mathrm{G} = 0$). Mais il suffit de remarquer que si Φ et Ψ sont connues, pour un système de coordonnées u, v, on en déduit leurs expressions pour un autre système de coordonnées u, v, en y effectuant directement le changement de variables correspondant. Notre théorème est donc vrai pour tout système de coordonnées superficielles, dès qu'il est vrai pour un seul.

Les conditions d'intégrabilité.

2. Les coefficients des formules (10) satisfont à certaines conditions, dites *conditions d'intégrabilité* qu'on obtient en écrivant que les dérivées du troisième ordre $\dfrac{\partial^3 x}{\partial u^2\,\partial v}$, $\dfrac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2}$ ont la même valeur, qu'on les obtienne en différentiant l'une ou l'autre des formules (10).

Pour pouvoir calculer ces conditions, il est commode d'avoir des formules qui donnent les dérivées des cosinus directeurs l, m, n de la normale. Ils sont définis par les équations

$$\sum l\,\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum l\,\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad \sum l^2 = 1,$$

qui donnent, par différentiation :

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\sum \frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = -\sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\mathrm{L}, && \sum \frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = -\sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = -\mathrm{M},\\ &\sum \frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = -\mathrm{M}, && \sum \frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = -\sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\mathrm{N},\\ &\sum \frac{\partial l}{\partial u}\,l = 0, && \sum \frac{\partial l}{\partial v}\,l = 0. \end{aligned}$$

Si donc on pose, en suivant la même méthode qu'au paragraphe précédent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u} &= \mathrm{P}'\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{P}''\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{P}l,\\ \frac{\partial m}{\partial u} &= \mathrm{P}'\frac{\partial y}{\partial u} + \mathrm{P}''\frac{\partial y}{\partial v} + \mathrm{P}m,\\ \frac{\partial n}{\partial u} &= \mathrm{P}'\frac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{P}''\frac{\partial z}{\partial v} + \mathrm{P}n, \end{aligned}$$

on trouvera :

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u} = \mathrm{EP}' + \mathrm{FP}'', \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial u} = \mathrm{FP}' + \mathrm{GP}'', \quad \sum l\,\frac{\partial l}{\partial u} = \mathrm{P};$$

c'est-à-dire qu'on peut écrire, en tenant compte des formules (12),

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u} &= \mathrm{P}'\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{P}''\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \text{et de même :}\\ \frac{\partial l}{\partial v} &= \mathrm{Q}'\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{Q}''\frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned} \right.$$

les coefficients $\mathrm{P}', \mathrm{P}'', \mathrm{Q}', \mathrm{Q}''$ étant définis par :

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{EP}' + \mathrm{FP}'' = -\mathrm{L}, \qquad \mathrm{FP}' + \mathrm{GP}'' = -\mathrm{M},\\ &\mathrm{EQ}' + \mathrm{FQ}'' = -\mathrm{M}, \qquad \mathrm{FQ}' + \mathrm{GQ}'' = -\mathrm{N}, \end{aligned} \right.$$

et qu'on aura les mêmes formules pour m, n en changeant x en y, et en z, respectivement.

Nous achèverons le calcul, en supposant la surface rapportée à ses lignes minima. Les calculs précédents se simplifient alors beaucoup. Si nous appliquons directement les formules trouvées, nous obtenons :

$$\mathrm{E} = 0, \qquad \mathrm{G} = 0,$$
$$\mathrm{L}'' = 0, \quad \mathrm{L}' = \frac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial u}, \quad \mathrm{M}'' = 0, \quad \mathrm{M}' = 0, \quad \mathrm{N}'' = \frac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial v}, \quad \mathrm{N}' = 0;$$
$$\mathrm{P}'' = -\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{F}}, \quad \mathrm{P}' = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{F}}, \qquad \mathrm{Q}'' = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{F}}, \quad \mathrm{Q}' = -\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{F}};$$

c'est-à-dire

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \dfrac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{L}\,l, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}\,l, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \dfrac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{N}\,l, \end{cases}$$

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial u} = -\dfrac{1}{\mathrm{F}}\left(\mathrm{M}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{L}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right), \\ \dfrac{\partial l}{\partial v} = -\dfrac{1}{\mathrm{F}}\left(\mathrm{N}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{M}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Alors, en différentiant la première équation (15), il vient :

$$\frac{\partial^3 x}{\partial u^2\, dv} = \left(\frac{\partial^2 \log \mathrm{F}}{\partial u\,\partial v} - \frac{\mathrm{NL}}{\mathrm{F}}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{F}}\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial u}\mathrm{M} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial v}\right) l,$$

en différentiant la deuxième équation (15), il vient

$$\frac{\partial^3 x}{\partial u^2\,\partial v} = \frac{-\mathrm{M}^2}{\mathrm{F}}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{F}}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} l;$$

et en égalant, on obtient :

$$(17)\qquad \left(\frac{\partial^2 \log \mathrm{F}}{\partial u\,\partial v} - \frac{\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2}{\mathrm{F}}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial u}\mathrm{M} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}\right) l = 0.$$

C'est là une condition de la forme

$$\mathrm{S}'\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{S}''\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{S}l \; = 0,$$

et en reprenant le même calcul, pour y et z, on obtiendrait les conditions analogues

$$\begin{aligned} \mathrm{S}'\frac{\partial y}{\partial u} + \mathrm{S}''\frac{\partial y}{\partial v} + \mathrm{S}m &= 0, \\ \mathrm{S}'\frac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{S}''\frac{\partial z}{\partial v} + \mathrm{S}n \; &= 0. \end{aligned}$$

On en conclut qu'on a nécessairement $\mathrm{S} = \mathrm{S}' = \mathrm{S}'' = 0$, c'est-à-dire ici

$$(18)\qquad \frac{\partial^2 \log \mathrm{F}}{\partial u\,\partial v} - \frac{\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2}{\mathrm{F}} = 0, \qquad \mathrm{M}\frac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} = 0;$$

et cela est suffisant pour que (17) ait lieu.

En égalant de même les deux valeurs de $\dfrac{\partial^3 x}{\partial u\,\partial v^2}$, on obtiendra les conditions qui se déduisent de (18) en échangeant les rôles des variables u, v ; cela ne modifie que la seconde de ces conditions.

Les conditions d'intégrabilité cherchées sont donc :

$$
(19)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{M}\,\frac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial u} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial v},\\
&\frac{\partial^2 \log \mathrm{F}}{\partial u\,\partial v} = \frac{\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2}{\mathrm{F}},\\
&\mathrm{M}\,\frac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial v} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u},
\end{aligned}\right.
$$

et ce sont là, d'après la théorie des équations différentielles, les seules conditions d'intégrabilité du système considéré.

Courbure totale.

3. La deuxième des formules précédentes, due à Gauss

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{F}}{\partial u\,\partial v} = \frac{\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2}{\mathrm{F}}$$

conduit à une conséquence importante. Reprenons en effet l'équation aux rayons de courbure principaux qui est ici

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2) + 2\mathrm{SFHM} - \mathrm{S}^2\mathrm{F}^2 = 0,$$

où

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}}.$$

On peut l'écrire

$$\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2 + 2\mathrm{FM}\,\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{\mathrm{F}^2}{\mathrm{R}^2} = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2} = -\frac{\mathrm{LN}-\mathrm{M}}{\mathrm{F}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2} = -\frac{1}{\mathrm{F}}\,\frac{\partial^2 \log \mathrm{F}}{\partial u\,\partial v};$$

le produit des rayons de courbure principaux ne dépend que de l'élément linéaire ; il se conserve donc dans la déformation des surfaces. On donne à $\dfrac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}$ le nom de *courbure totale.*

Représentation sphérique. De même que l'on a fait correspondre à une courbe son indicatrice sphérique, on peut imaginer une correspondance entre une surface quelconque et la sphère de rayon 1, l'homologue d'un point (u, v) de la surface étant le point (l, m, n). A une aire de la surface correspond une aire sphérique. La considération de la limite du rapport de ces aires lorsqu'elles deviennent infiniment petites dans toutes leurs dimensions va nous conduire à une définition directe de la courbure totale.

L'aire sur la surface a pour expression

$$\mathcal{A} = \iint \sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}\,du\,dv = \iint \mathrm{H}\,du\,dv,$$

Pour avoir l'aire homologue sur la sphère, il faut d'abord calculer l'élément linéaire $dl^2 + dm^2 + dn^2$. D'après les formules (16) du N° précédent, nous avons

$$\begin{aligned} dl &= \frac{\partial l}{\partial u}\,du + \frac{\partial l}{\partial v}\,dv = -\frac{du}{\mathrm{F}}\left(\mathrm{L}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{M}\,\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{dv}{\mathrm{F}}\left(\mathrm{N}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{M}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ &= -\frac{1}{\mathrm{F}}\left[\mathrm{L}\,\frac{\partial x}{\partial v}\,du + \mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,dv\right]; \end{aligned}$$

d'où

$$\sum dl^2 = \frac{1}{\mathrm{F}^2}\left[\mathrm{M}^2\,2\mathrm{F}\,du\,dv + 2\mathrm{LMF}\,du^2 + 2\mathrm{MNF}\,dv^2 + 2\mathrm{LNF}\,du\,dv\right],$$

$$\sum dl^2 = \frac{2\mathrm{LM}}{\mathrm{F}}\,du^2 + 2\,\frac{\mathrm{LN} + \mathrm{M}^2}{\mathrm{F}}\,du\,dv + \frac{2\mathrm{MN}}{\mathrm{F}}\,dv^2.$$

Pour la sphère la fonction H sera donc

$$\sqrt{4\,\frac{\mathrm{LM^2N}}{\mathrm{F}^2} - \frac{(\mathrm{LN} + \mathrm{M}^2)^2}{\mathrm{F}^2}} = \frac{\mathrm{LN} - \mathrm{M}^2}{i\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{LN} - \mathrm{M}^2}{\mathrm{H}},$$

et l'aire sphérique a pour expression

$$\mathcal{A}' = \iint \frac{\mathrm{LN} - \mathrm{M}^2}{\mathrm{H}}\,du\,dv;$$

ce qui peut s'écrire, en remarquant que

$$d\mathcal{A} = \mathrm{H}\,du\,dv, \qquad \mathcal{A}' = \iint \frac{\mathrm{LN} - \mathrm{M}^2}{\mathrm{H}^2}\,d\mathcal{A} = \iint \frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}\,d\mathcal{A},$$

donc

$$d\mathcal{A}' = \frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}\,d\mathcal{A};$$

le rapport des aires homologues sur la surface et sur la sphère a donc pour limite la courbure totale, lorsque ces aires deviennent infiniment petites dans toutes leurs dimensions.

Coordonnées orthogonales et isothermes.

4. Pour éviter l'emploi des imaginaires dans les considérations qui précédent, nous introduirons un nouveau système de coordonnées curvilignes. La surface étant supposée réelle, nous choisirons les coordonnées minima de façon que u, v soient imaginaires conjugués. Nous poserons donc

$$u = u' + iv', \qquad v = u' - iv',$$

u', v' étant des quantités réelles. Nous en tirons

$$du = du' + i\,dv', \qquad dv = du' - i\,dv',$$

d'où
$$du\,dv = du'^2 + dv'^2.$$
L'élément linéaire prend la forme
$$ds^2 = 2\mathrm{F}\,du\,dv = 2\mathrm{F}(du'^2 + dv'^2);$$
les coordonnées u', v' sont orthogonales ; on leur donne le nom de *coordonnées orthogonales et isothermes*. On peut dire que *ces coordonnées divisent la surface en un réseau de carrés infiniment petits*. Considérons en effet les courbes coordonnées $u', u'+h, u'+2h, \dots$ et $v', v'+h, v'+2h, \dots$; si on prend l'un des quadrilatères curvilignes obtenus, ses quatre angles sont droits, ses côtés sont $\sqrt{2\mathrm{F}}\,du'$ et $\sqrt{2\mathrm{F}}\,dv'$, c'est-à-dire $\sqrt{2\mathrm{F}}\,h$, aux infiniment petits d'ordre supérieur près ; ces arcs sont égaux.

Avec ce système de coordonnées particulières, en désignant par $\overline{\mathrm{E}}, \overline{\mathrm{F}}, \overline{\mathrm{G}}, \overline{\mathrm{H}}$ les valeurs des fonctions analogues à $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}$, nous avons
$$\overline{\mathrm{E}} = 2\mathrm{F}, \quad \overline{\mathrm{G}} = 2\mathrm{F}, \quad \overline{\mathrm{F}} = 0, \quad \overline{\mathrm{H}}^2 = \overline{\mathrm{E}}\overline{\mathrm{G}} - \overline{\mathrm{F}}^2 = 4\mathrm{F}^2, \quad \overline{\mathrm{H}} = 2\mathrm{F},$$
donc
$$ds^2 = \overline{\mathrm{H}}(du'^2 + dv'^2).$$
Mais nous avons
$$\frac{\partial\Phi}{\partial u'} = \frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\Phi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v'} = i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right);$$
d'où
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u'^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}, \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial v'^2} = -\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} - 2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right],$$
et
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v'^2} = 4\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v},$$
d'où par conséquent
$$4\,\frac{\partial^2 \log \mathrm{F}}{\partial u\,\partial v} = 4\,\frac{\partial^2 \log \overline{\mathrm{H}}}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 \log \overline{\mathrm{H}}}{\partial u'^2} + \frac{\partial^2 \log \overline{\mathrm{H}}}{\partial v'^2}.$$
En supprimant les accents, nous avons donc les formules suivantes, en coordonnées orthogonales et isothermes :
$$ds^2 = \mathrm{H}(du^2 + dv^2),$$
$$\frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2} = -\frac{1}{2\mathrm{H}}\left(\frac{\partial^2 \log \mathrm{H}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \mathrm{H}}{\partial v^2}\right).$$
Nous poserons encore
$$\sum l\,d^2x = \mathrm{L}\,du^2 + 2\mathrm{M}\,du\,dv + \mathrm{N}\,dv^2.$$

L'équation aux rayons de courbure principaux sera

$$(\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2)-\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}}(\mathrm{L}+\mathrm{N})+\frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{R}^2}=0,$$

et on aura

$$\frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}=\frac{\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2}{\mathrm{H}^2}.$$

Calculons la représentation sphérique. Posons

$$l'=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}}\frac{\partial x}{\partial u},\qquad m'=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}}\frac{\partial y}{\partial u},\qquad n'=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}}\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$l''=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}}\frac{\partial x}{\partial v},\qquad m''=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}}\frac{\partial y}{\partial v},\qquad n''=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

De la relation

$$\sum l^2=1,$$

nous tirons

$$\sum l\,\frac{\partial l}{\partial u}=0.$$

Maintenant

$$\mathrm{L}=\sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=-\sum\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}=-\sqrt{\mathrm{H}}\sum l'\,\frac{\partial l}{\partial u};$$

d'où

$$\sum l'\,\frac{\partial l}{\partial u}=-\frac{\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{H}}};$$

de même

$$\mathrm{M}=\sum l\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=-\sum\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=-\sqrt{\mathrm{H}}\sum l''\,\frac{\partial l}{\partial u},\qquad \sum l''\,\frac{\partial l}{\partial u}=-\frac{\mathrm{M}}{\sqrt{\mathrm{H}}}.$$

D'où trois équations en $\frac{\partial l}{\partial u},\frac{\partial m}{\partial u},\frac{\partial n}{\partial u}$. Multiplions respectivement par l', l'', l''' et ajoutons, il vient

$$\frac{\partial l}{\partial u}=-\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{H}}\frac{\partial x}{\partial v};$$

de même :

$$\frac{\partial m}{\partial u}=-\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}}\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{H}}\frac{\partial y}{\partial v},$$
$$\frac{\partial n}{\partial u}=-\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{H}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

On obtiendra de même

$$\frac{\partial l}{\partial v}=-\frac{1}{\mathrm{H}}\left(\mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial u}+\mathrm{N}\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$
$$\frac{\partial m}{\partial v}=-\frac{1}{\mathrm{H}}\left(\mathrm{M}\frac{\partial y}{\partial u}+\mathrm{N}\frac{\partial y}{\partial v}\right),$$
$$\frac{\partial n}{\partial v}=-\frac{1}{\mathrm{H}}\left(\mathrm{M}\frac{\partial z}{\partial u}+\mathrm{N}\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Alors, sur la sphère, les trois fonctions E, F, G seront

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= \sum \left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{H}^2} \sum \left(\mathrm{L}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{M}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \frac{\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2}{\mathrm{H}},\\
\mathscr{F} &= \sum \frac{\partial l}{\partial u}\,\frac{\partial l}{\partial v} = \frac{1}{\mathrm{H}^2} \sum \left(\mathrm{L}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{M}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\mathrm{M}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{N}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{\mathrm{M}(\mathrm{L}+\mathrm{N})}{\mathrm{H}},\\
\mathscr{G} &= \sum \left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{H}^2} \sum \left(\mathrm{M}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{N}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \frac{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}{\mathrm{H}};
\end{aligned}$$

et

$$\mathscr{H}^2 = \mathscr{E}\mathscr{G} - \mathscr{F}^2 = \frac{(\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2)(\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2) - \mathrm{M}^2(\mathrm{L}+\mathrm{N})^2}{\mathrm{H}^2} = \left(\frac{\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2}{\mathrm{H}}\right)^2,$$

et alors l'aire sur la sphère a pour expression

$$\mathcal{A}' = \iint \frac{\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2}{\mathrm{H}}\,du\,dv.$$

On retrouve la même expression que précédemment, et on arriverait de même à la définition directe de la courbure totale.

Remarque. Dans l'expression précédente, $\mathcal{A}$ a un signe, qui est celui de $\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2$. Considérons le déterminant des cosinus l, m, n ; l', m', n' ; l'', m'', n'' : il est égal, à un facteur positif près à

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ \dfrac{\partial l}{\partial u} & \dfrac{\partial m}{\partial u} & \dfrac{\partial n}{\partial u} \\ \dfrac{\partial l}{\partial v} & \dfrac{\partial m}{\partial v} & \dfrac{\partial n}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2}{\mathrm{H}^2} \begin{vmatrix} l & m & n \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Il résulte de cette formule que, si $\mathcal{A}\mathcal{A}' > 0$, le point mobile x, y, z décrivant le contour qui limite l'aire sur la surface dans le sens direct le point l, m, n décrira le contour qui limite l'aire homologue sur la sphère aussi dans le sens direct. Si $\mathcal{A}\mathcal{A}' < 0$, les conclusions sont inverses.

Relations entre la courbure totale et la courbure géodésique.

5. La courbure totale est un élément qui reste invariant dans la déformation des surfaces. Cherchons s'il y a des relations entre elle et les autres éléments invariants dans la déformation. Considérons la courbure géodésique. En coordonnées orthogonales et isothermes, son expression est

$$\frac{1}{\mathrm{R}_g} = \frac{1}{\mathrm{H}\,ds^3}\left[\mathrm{H}^2(du\,d^2v - dv\,d^2u) - \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\,du^2 + \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}\,du\,dv - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\,dv^2 & \mathrm{H}\,du \\ -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}\,du^2 + \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\,du\,dv + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}\,dv^2 & \mathrm{H}\,dv \end{vmatrix}\right],$$

ou

$$\frac{1}{\mathrm{R}_g} = \frac{1}{ds^3}\left[\mathrm{H}(du\,d^2v - dv\,d^2u) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\,dv - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}\,du\right)(du^2+dv^2)\right];$$

mais on a

$$ds^2 = (du^2+dv^2)\,\mathrm{H},$$

et la formule précédente s'écrit

$$\frac{ds}{\mathrm{R}_g} = \frac{du\,d^2v - dv\,d^2u}{du^2+dv^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial u}\,dv - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial v}\,du;$$

ou encore

$$\frac{ds}{\mathrm{R}_g} = d\left(\operatorname{arctg}\frac{dv}{du}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial u}\,dv - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial v}\,du.$$

Imaginons alors dans le plan tangent les tangentes MU, MV aux courbes coordonnées dans le sens des u, v croissants ; considérons la tangente à une courbe quelconque MT de la surface, et soit $(\mathrm{MU}, \mathrm{MT}) = \varphi$. Nous avons

$$\cos\varphi = \sqrt{\mathrm{H}}\,\frac{du}{ds}, \qquad \sin\varphi = \sqrt{\mathrm{H}}\,\frac{dv}{ds};$$

d'où

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dv}{du}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{dv}{du};$$

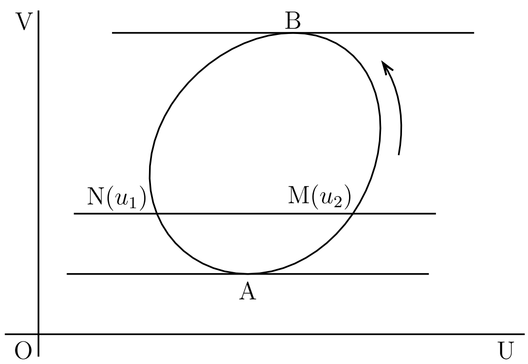
et la formule précédente devient

$$\frac{ds}{\mathrm{R}_g} = d\varphi + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial u}\,dv - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial v}\,du.$$

Prenons alors sur S un contour fermé et intégrons le long de ce contour dans le sens direct

$$\int \frac{ds}{\mathrm{R}_g} = \int d\varphi + \frac{1}{2}\int \frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial u}\,dv - \frac{1}{2}\int \frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial v}\,du.$$

Rappelons le *Théorème de Green*. Dans le plan des u, v, le point (u, v) décrit



un contour fermé, aussi dans le sens direct. Menons les tangentes parallèles à l'axe des u; soient A, B les points de contact. Nous avons ainsi deux arcs AMB et ANB, et si nous désignons par c le contour, nous avons

$$\int_c \frac{\partial f}{\partial u}\,dv = \int_{\mathrm{AMB}} \frac{\partial f}{\partial u}\,dv + \int_{\mathrm{BNA}} \frac{\partial f}{\partial u}\,dv.$$

Menons une parallèle à OU qui coupe le contour en deux points $\mathrm{M}(u_2)$ et $\mathrm{N}(u_1)$.

Soient a, b les valeurs de U qui correspondent aux deux points A, B. Nous avons

$$\int_c \frac{\partial f}{\partial u}\,dv = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{u_1 u_2} d\gamma - \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{u_1 u_2} d\gamma = \int_a^b \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_1\right] dv.$$

Mais

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_1 = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,du,$$

et alors

$$\int_c \frac{\partial f}{\partial u}\,dv = \int_a^b dv \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,du = \iint \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,du\,dv,$$

l'intégrale double étant étendue à toute l'aire limitée par le contour. Cette formule subsiste pour un contour simple quelconque. De même

$$\int_c \frac{\partial f}{\partial v}\,du = -\iint \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,du\,dv.$$

Alors nous aurons

$$\int \frac{ds}{\mathrm{R}_g} = \int d\varphi + \frac{1}{2}\iint \left[\frac{\partial^2 \log \mathrm{H}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \mathrm{H}}{\partial v^2}\right] du\,dv,$$

ou

$$\int \frac{ds}{\mathrm{R}_g} = \int d\varphi - \iint \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}\,du\,dv = \int d\varphi - \iint \frac{d\mathcal{A}}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2},$$

d'où la *formule d'Ossian Bonnet*

$$\mathcal{A}' = \iint \frac{d\mathcal{A}}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2} = \int d\varphi - \int \frac{ds}{\mathrm{R}_g}.$$

Remarque. L'angle φ est l'angle de MU avec la tangente à la courbe. Supposons qu'en chaque point de la surface on détermine une direction MO, dont les cosinus directeurs sont des fonctions bien déterminées de u, v. Soit $\psi = (\mathrm{MO}, \mathrm{MU})$ et $\psi' = (\mathrm{MO}, \mathrm{MT})$.

Nous avons

$$\varphi' = \psi + \varphi,$$

d'où

$$d\varphi' = d\psi + d\varphi.$$

Intégrons le long d'un contour fermé quelconque

$$\int d\varphi' = \int d\psi + \int d\varphi;$$

or, ψ est une fonction de u, v, et le long d'un contour fermé, on a

$$\int d\psi(u,v) = 0;$$

donc

$$\int d\varphi' = \int d\varphi,$$

et l'on peut substituer à l'angle φ l'angle φ' précédemment défini.

Triangles géodésiques.

Nous appellerons *triangle géodésique* la figure formée par trois lignes géodésiques. Le long de chacun des côtés on a

$$\int \frac{ds}{\mathrm{R}_g} = \int \frac{\sin\theta}{\mathrm{R}}\, ds = 0,$$

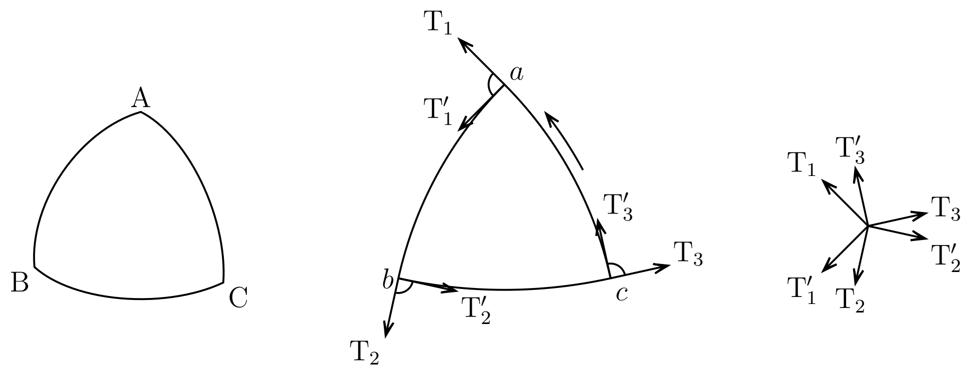
et la formule d'O. Bonnet nous donne

$$\mathcal{A}' = \int d\varphi,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{A}' = \int_{\mathrm{AB}} d\varphi + \int_{\mathrm{BC}} d\varphi + \int_{\mathrm{CA}} d\varphi.$$

Les coordonnées orthogonales et isothermes constituent une représentation conforme de la surface sur le plan des u, v. Considérons donc sur ce plan la re-



présentation a, b, c du triangle ABC. Menons aux extrémités a, b, c les tangentes aux côtés dans le sens direct : Soient $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$, $\mathrm{T}'_1, \mathrm{T}'_2, \mathrm{T}'_3$ ces tangentes. Si par un point du plan nous menons des parallèles à ces tangentes, nous aurons

$$\int_{\mathrm{AB}} d\varphi = (\mathrm{T}'_1, \mathrm{T}_2), \qquad \int_{\mathrm{BC}} d\varphi = (\mathrm{T}'_2, \mathrm{T}_3), \qquad \int_{\mathrm{CA}} d\varphi = (\mathrm{T}'_3, \mathrm{T}_1);$$

or, si nous appelons a, b, c les trois angles du triangle géodésique, nous avons

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{T}'_1, \mathrm{T}_2) + (\mathrm{T}'_2, \mathrm{T}_3) + (\mathrm{T}'_3, \mathrm{T}_1)\\
&\qquad = -\big[(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}'_1) + (\mathrm{T}_2, \mathrm{T}'_2) + (\mathrm{T}_3, \mathrm{T}'_3)\big] + \big[(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2) + (\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3) + (\mathrm{T}_3, \mathrm{T}_1)\big]\\
&\qquad = 2\pi - \big[(\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c)\big] = a + b + c - \pi,
\end{aligned}$$

d'où la *formule de Gauss*

$$a + b + c - \pi = \mathcal{A}'.$$

Si en particulier la surface est la sphère de rayon 1, on a la formule qui donne l'aire d'un triangle sphérique.

Nouvelle expression de la courbure géodésique.

Considérons un arc de courbe AB ; menons en AB les géodésiques tangentes à cette courbe, qui se coupent en C sous un angle ε que nous appellerons *angle de contingence géodésique.* Le long du contour de ce triangle on a

$$\int d\varphi = -\varepsilon,$$

et la formule d'O. Bonnet nous donne

$$-\varepsilon - \int_{\mathrm{AB}} \frac{ds}{\mathrm{R}_g} = \iint d\mathcal{A}'.$$

Supposons que A corresponde au paramètre t, B à $t + \Delta t$, et que Δt tende vers 0 ; soit Δs l'arc AB. Nous avons

$$-\frac{\varepsilon}{\Delta s} - \frac{1}{\Delta s} \int_{\mathrm{AB}} \frac{ds}{\mathrm{R}_g} = \frac{1}{\Delta s} \iint d\mathcal{A}'.$$

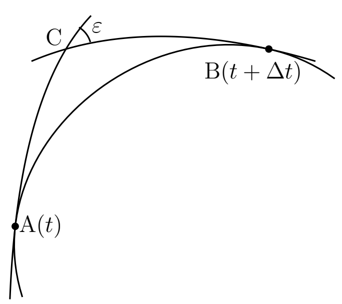
Soit $\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_g}\right)_m$ la valeur moyenne de la courbure géodésique sur l'arc AB ; nous avons,

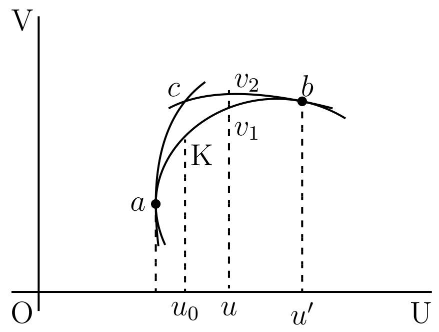
$$\frac{1}{\Delta s} \int_{\mathrm{AB}} \frac{ds}{\mathrm{R}_g} = \left(\frac{1}{\mathrm{R}_g}\right)_m,$$

et par suite

$$-\frac{\varepsilon}{\Delta s} - \left(\frac{1}{\mathrm{R}_g}\right)_m = \frac{1}{\Delta s} \iint d\mathrm{A}'.$$

Si Δs tend vers 0, $\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_g}\right)_m$ a pour limite la courbure géodésique au point A. Je





dis que le deuxième membre a pour limite 0 ; il suffit de montrer que $\iint d\mathcal{A}'$ est infiniment petit du deuxième ordre au moins. Considérons la représentation a, b, c du triangle ABC sur le plan U, V.

Nous avons

$$\iint d\mathcal{A}' = \iint \psi(u,v)\,du\,dv = \big[\psi(u,v)\big]_m \iint du\,dv$$

et au signe près $\iint du\,dv$ est égale à l'intégrale curviligne $\int v\,du$. Soient v_2, v_1 les fonctions v sur les arcs bc et bk. La partie de $\int v\,du$ donnée par ces arcs est $\int_{u_0}^{u'} (v_2 - v_1)\,du$. Or, les courbes ab et bc étant tangentes en b, $v_2 - v_1$ est infiniment petit du deuxième ordre au moins par rapport à $u' - u$ et *à fortiori* par rapport à $(u' - u_0)$. L'intégrale $\int_{u_0}^{u'} (v_2 - v_1)\,du$, qui est égale au produit de $(u' - u_0)$ par la valeur moyenne de $(v_2 - v_1)$ sera donc du troisième ordre au moins par rapport à $(u' - u_0)$, et, par suite, par rapport à Δs. Le même raisonnement s'appliquant aux autres arcs ac et ak, on voit que $\iint d\mathcal{A}'$ est du troisième ordre au moins.

EXERCICES.

18. Établir les conditions d'intégrabilité qui lient les invariants fondamentaux, en supposant la surface rapportée à ses lignes de courbure.

19. Même question, en supposant la surface rapportée à une famille de géodésiques et à leurs trajectoires orthogonales. Exprimer, en fonction de la quantité H, la courbure totale, et la forme différentielle $\frac{ds}{\mathrm{R}_g} - d\varphi$ (voir exercice 11) ; et retrouver ainsi la formule d'Ossian Bonnet.

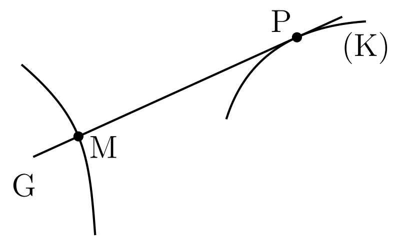
20. En supposant les coordonnées quelconques, trouver celle des conditions d'intégrabilité qui donne l'expression de la courbure totale.

CHAPITRE V.

SURFACES RÉGLÉES.

Surfaces développables.

1. Pour définir la variation de la droite qui engendre la surface réglée, nous nous donnerons la trajectoire d'un point M de cette droite, et la direction de cette droite pour chaque position du point M. Les coordonnées d'un point de



la surface sont ainsi exprimées en fonction de deux paramètres, l'un définissant la position du point M sur sa trajectoire (K), l'autre définissant la position du point P considéré sur la droite D. Soit

$$x = f(v), \qquad y = g(v), \qquad z = h(v),$$

la courbe K. Soient $l(v), m(v), n(v)$ les coefficients de direction de la génératrice, et u le rapport du segment MP au segment de direction de la génératrice. Les coordonnées de P sont

$$(1) \qquad x = f(v) + u\,l(v), \qquad y = g(v) + u\,m(v), \qquad z = h(v) + u\,n(v).$$

Cherchons la condition pour que la surface définie par les équations précédentes soit développable. Si nous exceptons les cas du cylindre et du cône, la condition nécessaire et suffisante est que les génératrices soient tangentes à une même courbe gauche. On peut donc trouver sur la génératrice G un point P tel que sa trajectoire soit constamment tangente à G ; on doit donc avoir, en appelant x, y, z les coordonnées de ce point

$$\frac{dx}{l} = \frac{dy}{m} = \frac{dz}{n} = d\rho;$$

d'où

$$(2) \qquad dx = l\,d\rho, \qquad dy = m\,d\rho, \qquad dz = n\,d\rho,$$

Mais les équations (1) donnent

$$dx = df + u\,dl + l\,du, \quad dy = dg + u\,dm + m\,du, \quad dz = dh + u\,dn + n\,du$$

et les équations (2) s'écrivent

$$\begin{aligned} df &+ u\,dl + l\,(du - d\rho) = 0, \\ dg &+ u\,dm + m\,(du - d\rho) = 0, \\ dh &+ u\,dn + n\,(du - d\rho) = 0; \end{aligned}$$

ou, en posant

$$d\sigma = du - d\rho, \tag{3}$$

$$\begin{cases} df + u\,dl + l\,d\sigma = 0, \\ dg + u\,dm + m\,d\sigma = 0, \\ dh + u\,dn + n\,d\sigma = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$d\sigma$ et u doivent satisfaire à ces trois équations linéaires ; donc on doit avoir

$$\begin{vmatrix} df & dl & l \\ dg & dm & m \\ dh & dn & n \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Si les trois déterminants déduits du tableau

$$\begin{Vmatrix} dl & dm & dn \\ l & m & n \end{Vmatrix}$$

ne sont pas tous nuls, la condition (5) est suffisante. Si ces trois déterminants sont nuls, on a

$$\frac{dl}{l} = \frac{dm}{m} = \frac{dn}{n},$$

et l'intégration de ces équations nous montre que l, m, n sont proportionnels à des quantités fixes ; la surface est alors un cylindre. En écartant ce cas, la condition (5) est nécessaire et suffisante.

Remarque 1. Pour que le point P décrive effectivement une courbe, il faut que dx, dy, dz, et par suite $d\rho$, ne soient pas identiquement nul. Si on avait $d\rho = 0$, toutes les génératrices passeraient par un point fixe, la surface serait un cône. La condition (5) s'applique donc au cas du cône.

Remarque 2. On emploie souvent les équations de la génératrice sous la forme

$$x = \mathrm{M}z + \mathrm{P}, \qquad y = \mathrm{N}z + \mathrm{Q},$$

$\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}$, étant fonctions d'un paramètre arbitraire. C'est un cas particulier de la représentation générale (1) dans laquelle on fait $h(v) = 0$ et $n(v) = 1$; alors $z = u$, et on peut écrire

$$x = f(v) + z\,l(v), \qquad y = g(v) + z\,m(v), \tag{6}$$

les coefficients de direction sont $l, m, 1$. La courbe (K) est alors la section par le plan $z = 0$; dans ce cas la condition (5) prend la forme simple

$$\begin{vmatrix} df & dl \\ dg & dm \end{vmatrix} = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{vmatrix} d\mathrm{M} & d\mathrm{P} \\ d\mathrm{N} & d\mathrm{Q} \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Propriétés des développables.

Revenons au cas général; supposons que l, m, n soient les cosinus directeurs de la génératrice; on a

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

d'où

$$l\,dl + m\,dm + n\,dn = 0.$$

Multiplions alors les équations (4) respectivement par dl, dm, dn, et ajoutons, il vient

$$u = -\frac{\sum dl\,df}{\sum dl^2}.$$

Supposons en outre que MG soit normale à la courbe (K). Il est toujours possible de trouver sur une surface réglée des trajectoires orthogonales des génératrices. Il suffit que l'on ait

$$\sum l\,dx = 0,$$

ou

$$\sum l\,df + u \sum l\,dl + \sum l^2\,du = 0;$$

ou, comme ici $\sum l^2 = 1$, $\sum l\,dl = 0$,

$$\sum l\,df + du = 0;$$

la détermination des trajectoires orthogonales se fait donc au moyen d'une quadrature. Si donc nous supposons (K) normale à la génératrice, nous avons

$$\sum l\,df = 0.$$

Multiplions alors les équations (4) respectivement par l, m, n et ajoutons, il vient $d\sigma = 0$, d'où $d\rho = du$, et les équations (2) deviennent

$$(3') \qquad dx = l\,du, \qquad dy = m\,du, \qquad dz = n\,du.$$

Mais, l, m, n étant les cosinus directeurs de la tangente à l'arête de rebroussement (R), u représente l'arc de cette courbe compté dans le sens positif choisi sur la génératrice à partir d'une origine arbitraire I; et comme u représente aussi la longueur MP, on a

$$d\,\mathrm{MP} = d\,(\mathrm{arc\,IP});$$

d'où

$$\mathrm{MP} = \mathrm{arc\,IP} + \mathrm{const.}$$

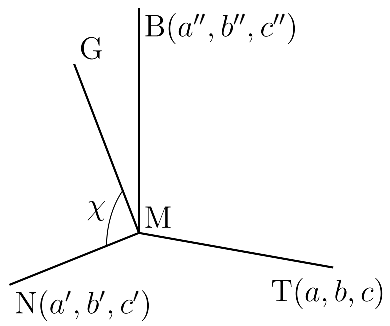
On peut toujours choisir l'origine des arcs telle que la constante soit nulle. Alors MP = arc IP. La courbe (K) est une développante de la courbe (R). *Sur une surface développable, les trajectoires orthogonales des génératrices sont des développantes de l'arête de rebroussement.*

Les formules (4) donnent alors

$$(4') \qquad df + u\,dl = 0, \qquad dg + u\,dm = 0, \qquad dh + u\,dn = 0.$$

Développées des courbes gauches.

2. Supposons qu'on se donne la courbe (K), et cherchons à mener à cette courbe une normale en chacun de ses points de façon à obtenir une surface développable. Nous prendrons pour variable v l'arc s de la courbe (K). Considérons le trièdre de Serret au point M de la courbe. Soit MG la normale cherchée ;



elle est dans le plan normal à la courbe, pour la définir, il suffira donc de se donner l'angle $(\mathrm{MN}, \mathrm{MG}) = \chi$. Le point à l'unité de distance sur MG a pour coordonnées par rapport au trièdre de Serret $0, \cos\chi, \sin\chi$; si donc l, m, n sont les cosinus directeurs de MG, nous avons

$$l = a'\cos\chi + a''\sin\chi,$$
$$m = b'\cos\chi + b''\sin\chi,$$
$$n = c'\cos\chi + c''\sin\chi.$$

Or, v étant l'arc de la courbe (K), on a

$$df = a\,dv, \qquad dg = b\,dv, \qquad dh = c\,dv;$$

les formules $(4')$ donnent

$$a\,dv + u\left[(-a'\sin\chi + a''\cos\chi)\,d\chi - \cos\chi\left(\frac{a}{\mathrm{R}} + \frac{a''}{\mathrm{T}}\right)dv + \sin\chi\,\frac{a'}{\mathrm{T}}\,dv\right] = 0;$$

ou

$$a\left(1 - \frac{u\cos\chi}{\mathrm{R}}\right) + a'u\sin\chi\left(-\frac{d\chi}{dv} + \frac{1}{\mathrm{T}}\right) + a''u\cos\chi\left(\frac{d\chi}{dv} - \frac{1}{\mathrm{T}}\right) = 0.$$

On a deux équations analogues avec b, b', b'' et c, c', c'' ; nous avons ainsi trois équations linéaires et homogènes par rapport aux coefficients de a, a', a''. Le déterminant est 1, donc les inconnues sont toutes nulles ; et comme u n'est pas constamment nul, on a

$$1 - \frac{u\cos\chi}{\mathrm{R}} = 0, \qquad \sin\chi\left(-\frac{d\chi}{dv} + \frac{1}{\mathrm{T}}\right) = 0, \qquad \cos\chi\left(\frac{d\chi}{dv} - \frac{1}{\mathrm{T}}\right) = 0.$$

Les deux dernières donnent, en remplaçant v par l'arc s

(1) $$\frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\mathrm{T}},$$

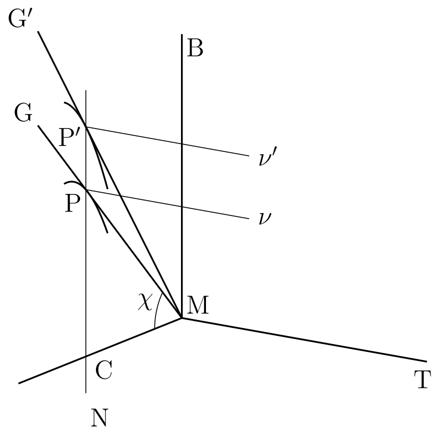
et la première donne

(2) $$u = \frac{\mathrm{R}}{\cos\chi}.$$

Il y a donc une infinité de solutions : χ se détermine par une quadrature.

La formule (2) nous montre que

$$R = u \cos \chi;$$



donc la projection du point P, où la normale MG rencontre son enveloppe, sur la normale principale, est le centre de courbure. *Le point de contact de la normale avec son enveloppe est sur la droite polaire. Les développées d'une courbe sont sur la surface polaire.*

Considérons deux solutions χ, χ' de l'équation (1), la différence $\chi - \chi'$ est constante ; les deux normales MG, MG′ se coupent sous un angle constant. Donc, *lorsque une normale à une courbe décrit une surface développable, si on la fait tourner dans chacune de ses positions d'un angle constant autour de la tangente, la droite obtenue décrit encore une développable.*

Le plan osculateur à une développée est le plan tangent à la développable correspondante : c'est le plan GMT, ce plan est normal au plan BMC, plan tangent à la surface polaire. *Donc les développées sont des géodésiques de la surface polaire.*

Considérons la normale principale P″ en P à la développée, elle est dans le plan osculateur GMT, elle est perpendiculaire à la tangente MP, donc parallèle à MT. *Les normales principales aux développées d'une courbe sont parallèles aux tangentes à la courbe. Le plan normal à la courbe est le plan rectifiant de toutes ses développées.*

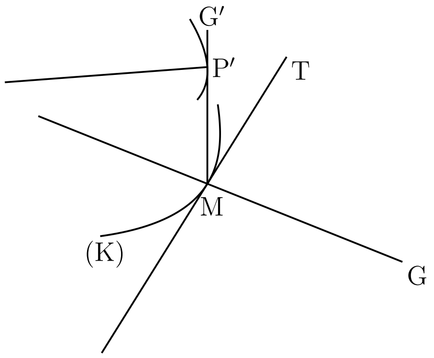
En partant d'une courbe (G), et remarquant que la courbe donnée (K) en est la développante, on pourra énoncer les propriétés précédentes de façon à obtenir les propriétés des développantes d'une courbe.

Lignes de courbure.

3. Considérons sur une surface (S) une ligne de courbure (K), et la développable circonscrite à (S) le long de (K). La direction d'une génératrice MG de cette développable est conjuguée de la tangente MT à la ligne de courbure, et par conséquent est perpendiculaire à MT, c'est-à-dire normale à (K). Cette génératrice MG est donc constamment tangente à la développée d'une ligne de courbure, et nous voyons que *les normales à une ligne de courbure tangentes à la surface engendrent une développable.*

Faisons tourner MG d'un angle droit autour de la tangente, nous obtenons une droite MG′ qui, étant perpendiculaire aux deux tangentes à la surface MT, MG, sera la normale à la surface. Donc *les normales à la surface en tous les points d'une ligne de courbure engendrent une développable.*

Considérons le point P′ où la droite MG′ touche son enveloppe ; c'est le point où la droite polaire de la ligne de courbure rencontre la normale à la surface. Or, d'après le Théorème de Meusnier, les droites polaires de toutes les courbes de la surface tangentes en M rencontrent la normale en M en un même point, qui est le centre de courbure de la section normale correspondante : P′ est donc le centre de courbure de la section principale G′MT, c'est l'un des centres de courbure principaux de la surface au point M.



Reprenons alors les formules (4′) du N° 1, que nous écririons

$$dx+u\,dl = 0, \quad dy+u\,dm = 0, \quad dz+u\,dn = 0;$$

l, m, n sont ici les cosinus directeurs de la normale, u est le rayon de courbure principal R; et pour un déplacement sur une ligne de courbure, nous avons les *formules d'Olinde Rodrigues*

$$dx + \mathrm{R}\,dl = 0, \qquad dy + \mathrm{R}\,dm = 0, \qquad dz + \mathrm{R}\,dn = 0.$$

Les *Théorèmes de Joachimsthal* se déduisent aisément de ce qui précède. Supposons que l'intersection (K) de deux surfaces $(\mathrm{S}), (\mathrm{S}_1)$ soit une ligne de courbure pour chacune d'elles. Soient $\mathrm{MG}, \mathrm{MG}_1$ les normales aux deux surfaces en un point M de (K). Elles engendrent deux développables, donc enveloppent deux développées de (K), et par suite leur angle est constant. *Réciproquement*, si l'intersection (K) de $(\mathrm{S}), (\mathrm{S}_1)$ est ligne de courbure de (S_1), et si l'angle des deux surfaces est constant tout le long de (K), la normale MG_1 à (S_1) engendre une développable, et comme MG_1 fait avec MG un angle constant, elle engendre aussi une développable, donc (K) est une ligne de courbure sur (S).

La condition (5) pour qu'une droite engendre une surface développable est ici

$$\begin{vmatrix} dx & dl & l \\ dy & dm & m \\ dz & dn & n \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dv & \dfrac{\partial l}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial l}{\partial v}\,dv & l \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,dv & \dfrac{\partial m}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial m}{\partial v}\,dv & m \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,dv & \dfrac{\partial n}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial n}{\partial v}\,dv & n \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions par

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & l \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & m \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & n \end{vmatrix} \neq 0;$$

Nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv & -\mathrm{L}\,du - \mathrm{M}\,dv & 0 \\ \mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv & -\mathrm{M}\,du - \mathrm{N}\,dv & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

et nous retrouvons ainsi *l'équation différentielle des lignes de courbure*

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv & \mathrm{L}\,du + \mathrm{M}\,dv \\ \mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv & \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

La même méthode, appliquée à l'équation (6)

$$\begin{vmatrix} dx & dl \\ dy & dm \end{vmatrix} = 0$$

donne facilement l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} dx + p\,dz & dp \\ dy + q\,dz & dq \end{vmatrix} = 0.$$

Développement d'une surface développable sur un plan.

4. *Toute surface développable est applicable sur un plan.*

Considérons d'abord le cas du cylindre, dont les équations sont

$$\begin{aligned} x &= f(v) + u\,l, & y &= g(v) + u\,m, & z &= h(v) + u\,n; \\ dx &= f'(v)\,dv + l\,du, & dy &= g'(v)\,dv + m\,du, & dz &= h'(v)\,dv + n\,du. \end{aligned}$$

Nous avons

$$ds^2 = \sum f'^2(v)\,dv^2 + 2\sum l f'(v)\,du\,dv + \sum l^2\,du^2.$$

Nous pouvons supposer que la directrice : $x = f(v)$, $y = g(v)$, $z = h(v)$ est une section droite, ce qui donne $\sum l f' = 0$; que l, m, n sont cosinus directeurs : $\sum l^2 = 1$; enfin que v est l'arc sur la section droite : $\sum f'^2 = 1$. Alors on a

$$ds^2 = du^2 + dv^2; \tag{1}$$

on a l'élément linéaire d'un plan. *Un cylindre est applicable sur un plan*, Φ et (1) donne la loi du développement.

Voyons maintenant le cas du cône

$$x = u\,l(v), \qquad y = u\,m(v), \qquad z = u\,n(v);$$

u est la longueur prise sur la génératrice à partir du sommet ; supposons que l, m, n soient cosinus directeurs de la génératrice, v étant l'arc de courbe sphérique intersection du cône avec la sphère $u = 1$. Alors

$$\begin{aligned} dx &= ul'(v)\;\;dv + l(v)\;\;du, \\ dy &= um'(v)\,dv + m(v)\,du, \\ dz &= un'(v)\;\;dv + n(v)\;\;du; \end{aligned}$$

et

$$ds^2 = u^2\,dv^2 + du^2. \tag{2}$$

C'est l'élément linéaire d'un plan en coordonnées polaires. Un *cône est applicable sur un plan*, Φ et (2) donne la loi du développement.

Passons enfin au cas général

$$x = f(v) + u\,l(v), \qquad y = g(v) + u\,m(v), \qquad z = h(v) + u\,n(v).$$

Nous supposerons que la courbe $x = f(v)$, $y = g(v)$, $z = h(v)$ soit l'arête de rebroussement, v l'arc sur cette courbe, l, m, n les cosinus directeurs de la tangente en un point, et u la distance comptée sur cette tangente à partir du point de contact. Alors $l = f' = a$; $m = g' = b$; $n = h' = c$; et

$$l' = \frac{da}{dv} = \frac{a'}{\mathrm{R}}, \qquad m' = \frac{db}{dv} = \frac{b'}{\mathrm{R}}, \qquad n' = \frac{dc}{dv} = \frac{c'}{\mathrm{R}};$$

$$dx = a\,dv + u\,\frac{a'}{\mathrm{R}}\,dv + a\,du,$$

$$dy = b\,dv + u\,\frac{b'}{\mathrm{R}}\,dv + b\,du,$$

$$dz = c\,dv + u\,\frac{c'}{\mathrm{R}}\,dv + c\,du;$$

et

$$ds^2 = \big[d(u+v)\big]^2 + \frac{u^2}{\mathrm{R}^2}\,dv^2.$$

Cet élément reste le même si R garde la même expression en fonction de v. Donc *l'élément linéaire est le même pour toutes les surfaces développables dont les arêtes de rebroussement sont des courbes dont le rayon de courbure a la même expression en fonction de l'arc* :

$$\mathrm{R} = \Phi(v).$$

Nous pouvons déterminer une courbe plane dont le rayon de courbure s'exprime en fonction de l'arc par l'équation précédente. Nous prendrons pour coordonnées dans le plan de cette courbe l'arc s de la courbe, et la distance comptée sur la tangente à partir du point de contact et on aura pour l'élément linéaire du plan la forme précédente. La développable sera donc applicable sur ce plan. Quand la développable est donnée, on détermine par des opérations algébriques son arête de rebroussement, et par une quadrature l'arc de cette arête de rebroussement. On a alors

$$\mathrm{R} = \Phi(s).$$

Il faut construire une courbe plane satisfaisant à cette condition. Si α est l'angle de la tangente avec Ox, on a

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\alpha};$$

d'où

$$\frac{ds}{d\alpha} = \Phi(s), \qquad \alpha = \int \frac{ds}{\Phi(s)};$$

et alors

$$dx = \cos\alpha\,ds, \qquad dy = \sin\alpha\,ds;$$

x, y se déterminent au moyen de trois quadratures. La courbe que l'on obtient est le développement de l'arête de rebroussement.

Réciproque.

Réciproquement toute surface applicable sur un plan est une surface développable.

Soit la surface

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$$

que nous supposons applicable sur un plan. Nous avons, en choisissant convenablement les coordonnées u, v :

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 = du^2 + dv^2;$$

d'où

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 1.$$

Différentions ces relations successivement par rapport à u, v, nous avons

$$\begin{gathered}
\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0, \qquad \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = 0,\\
\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0;
\end{gathered}$$

d'où nous tirons :

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

Considérons les deux fonctions $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial y}{\partial u}$. Leur déterminant fonctionnel est :

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\\
\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}
\end{vmatrix}.$$

Or, considérons les équations

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \mathrm{Y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \mathrm{Z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= 0,\\
\mathrm{X}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \mathrm{Y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + \mathrm{Z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} &= 0;
\end{aligned}$$

d'après les relations précédemment écrites, ce système admet deux solutions distinctes

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} &= \frac{\partial x}{\partial u}, & \mathrm{Y} &= \frac{\partial y}{\partial u}, & \mathrm{Z} &= \frac{\partial z}{\partial u};\\
\mathrm{X} &= \frac{\partial x}{\partial v}, & \mathrm{Y} &= \frac{\partial y}{\partial v}, & \mathrm{Z} &= \frac{\partial z}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Ces solutions ne sont pas proportionnelles, sans quoi les courbes $u =$ const. et $v =$ const. seraient constamment tangentes. Donc les trois déterminants déduits du tableau

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{matrix} \right\|$$

sont nuls ; or, ce sont les déterminants fonctionnels des trois quantités $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ prises deux à deux, donc ces trois quantités sont fonctions de l'une d'entre elles, c'est-à-dire d'une seule variable t. De même $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, $\dfrac{\partial y}{\partial v}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ sont fonctions d'une même variable θ. De plus la relation

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

montre que θ par exemple s'exprime en fonction de t. Les six dérivées partielles sont donc fonctions d'une même variable ; le plan tangent à la surface dépend d'un seul paramètre. La surface est développable.

Remarque 1. Dans le développement les lignes géodésiques se conservent ; or, les géodésiques du plan sont des droites. *Les lignes géodésiques de la surface développable sont donc les lignes qui dans le développement de cette surface sur un plan, correspondent aux droites de ce plan.*

En particulier, considérons la surface rectifiante d'une courbe, enveloppe du plan rectifiant. Cette courbe est une géodésique de sa surface rectifiante, puisque son plan osculateur est perpendiculaire au plan tangent ; elle se développe donc suivant une droite lorsqu'on effectue le développement de la surface rectifiante sur un plan. *De là le nom de plan rectifiant.*

Remarque 2. Il résulte de là que la recherche des géodésiques d'une surface développable se ramène à son développement, et exige par conséquent quatre quadratures.

Remarque 3. La détermination des lignes de courbure, développantes de l'arête de rebroussement, revient à une quadrature.

Lignes géodésiques d'une surface développable.

5. Nous avons trouvé les lignes géodésiques d'une surface développable en considérant le développement de cette surface sur un plan. On peut les chercher directement. Soit l'arête de rebroussement

$$x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad z = h(s), \tag{1}$$

s désignant l'arc. Si a, b, c sont les cosinus directeurs de la tangente, et u une longueur comptée sur cette tangente à partir du point de contact, la surface est représentée par

$$x = f + u\,a, \qquad y = g + u\,b, \qquad z = h + u\,c;$$

en désignant par a', b', c', les dérivées de a, b, c par rapport à s, on a

$$\frac{dx}{ds} = a + u\,\frac{a'}{\mathrm{R}} + au', \qquad \frac{dy}{ds} = b + u\,\frac{b'}{\mathrm{R}} + bu', \qquad \frac{dz}{ds} = c + u\,\frac{c'}{\mathrm{R}} + cu';$$

ou

$$\frac{dx}{ds} = a(1+u') + a'\,\frac{u}{\mathrm{R}}, \quad \frac{dy}{ds} = b(1+u') + b'\,\frac{u}{\mathrm{R}}, \quad \frac{dz}{ds} = c(1+u') + c'\,\frac{u}{\mathrm{R}};$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = a\left(u'' - \frac{u}{\mathrm{R}^2}\right) + a'\,\frac{1}{\mathrm{R}}\left(1 + 2u' - u\,\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right) + a''\,\frac{-u}{\mathrm{RT}},$$

et les analogues.

L'équation des lignes géodésiques est, en remarquant que la normale à la surface n'est autre que la binormale à l'arête de rebroussement

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^2x}{ds^2} & \dfrac{d^2y}{ds^2} & \dfrac{d^2z}{ds^2} \\ \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} a\left(u'' - \dfrac{u}{\mathrm{R}^2}\right) + \dfrac{a'}{\mathrm{R}}\left(1 + 2u' - u\,\dfrac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right) + a''\,\dfrac{-u}{\mathrm{RT}} & \dots & \dots \\ a(1+u') + a'\,\dfrac{u}{\mathrm{R}} & \dots & \dots \\ a'' & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en décomposant en déterminants simples,

$$\frac{1}{\mathrm{R}}\left(1 + 2u' - u\,\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right)(1+u')\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \frac{u}{\mathrm{R}}\left(u'' - \frac{u}{\mathrm{R}^2}\right)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0;$$

ou enfin

$$\frac{u}{\mathrm{R}}\left(u'' - \frac{u}{\mathrm{R}^2}\right) - \frac{1}{\mathrm{R}}(1+u')\left(1 + 2u' - u\,\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$u\,u'' - 2u'^2 - u'\left(3 - u\,\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right) - \frac{u^2}{\mathrm{R}^2} + u\,\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}} - 1 = 0. \tag{2}$$

Telle est l'équation différentielle qui détermine u.

Cherchons la nature de l'intégrale générale. Si nous développons la surface sur un plan, la courbe (1) sera représentée par une courbe

$$x = \mathrm{F}(s), \qquad y = \mathrm{G}(s),$$

dont le rayon de courbure sera encore R. Le point homologue du point (u, s) de la surface sera

$$x = \mathrm{F} + u\mathrm{F}', \qquad y = \mathrm{G} + u\mathrm{G}'.$$

Les droites du plan sont

$$A(F + uF') + B(G + uG') + C = 0,$$

d'où

$$u = -\frac{AF + BG + C}{AF' + BG'};$$

en remarquant que le dénominateur est la dérivée du numérateur nous sommes donc conduits à poser

$$u = -\frac{w}{w'},$$

et à prévoir que l'équation en w sera linéaire, homogène du troisième ordre. Effectivement

$$u' = -1 + \frac{ww''}{w'^2},$$

et

$$u'' = \frac{ww'''}{w'^2} + \frac{w''}{w'} - \frac{2ww''^2}{w'^3};$$

(2) devient alors

$$-\frac{w}{w'}\left(\frac{ww'''}{w'^2} + \frac{w''}{w'} - \frac{2ww''^2}{w'^3}\right) - 2\left(-1 + \frac{ww''}{w'^2}\right)^2 - 3\left(-1 + \frac{ww''}{w'^2}\right) - \frac{R'}{R}\frac{w}{w'}\left(-1 + \frac{ww''}{w'^2}\right) - \frac{1}{R^2}\frac{w^2}{w'^2} - \frac{R'}{R}\frac{w}{w'} - 1 = 0;$$

ou, après simplification

$$w''' + \frac{R'}{R}\,w'' + \frac{1}{R^2}\,w' = 0.$$

Posons

$$w' = \theta,$$

il vient

$$\theta'' + \frac{R'}{R}\,\theta' + \frac{1}{R^2}\,\theta = 0, \tag{3}$$

équation linéaire du deuxième ordre en θ. Faisons disparaître le deuxième terme par le changement de variable

$$\alpha = \varphi(s),$$

d'où

$$\theta' = \frac{d\theta}{d\alpha}\,\varphi',$$

$$\theta'' = \frac{d^2\theta}{d\alpha^2}\,\varphi'^2 + \frac{d\theta}{d\alpha}\,\varphi'';$$

(3) devient
$$\frac{d^2\theta}{d\alpha^2}\,\varphi'^2 + \frac{d\theta}{d\alpha}\left(\varphi'' + \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\,\varphi'\right) + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\,\theta = 0.$$
Il faut alors choisir la fonction φ de façon que l'on ait
$$\varphi'' + \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\,\varphi' = 0,$$
ou
$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}.$$
On peut prendre
$$\varphi' = \frac{1}{\mathrm{R}},$$
et poser
$$ds = \mathrm{R}\,\alpha.$$
Nous obtenons alors l'équation
$$\frac{d^2\theta}{d\alpha^2} + \theta = 0,$$
dont l'intégrale générale est
$$\theta = w' = \mathrm{A}\cos\alpha + \mathrm{B}\sin\alpha = \frac{dw}{ds};$$
d'où
$$w = \mathrm{A}\int \cos\alpha\,ds + \mathrm{B}\int \sin\alpha\,ds + c,$$
et enfin
$$u = -\frac{\mathrm{A}\displaystyle\int \cos\alpha\,ds + \mathrm{B}\int \sin\alpha\,ds + c}{\mathrm{A}\cos\alpha + \mathrm{B}\sin\alpha},$$
avec
$$\alpha = \int \frac{ds}{\mathrm{R}}.$$
On peut se dispenser d'introduire l'arc s explicitement. Donc les lignes géodésiques d'une surface développable s'obtiennent par trois quadratures au plus. On constate de plus que les deux méthodes conduisent aux mêmes calculs.

Surfaces réglées gauches. Trajectoires orthogonales des génératrices.

6. Soit la surface
$$x = f(v) + u\,l(v), \qquad y = g(v) + u\,m(v), \qquad z = h(v) + u\,n(v);$$
les génératrices étant des géodésiques, il en résulte que *les trajectoires orthogonales des génératrices déterminent sur ces génératrices des segments égaux.* Pour obtenir ces trajectoires orthogonales, il faut déterminer u en fonction de v de façon que l'on ait
$$\sum l\,dx = 0.$$

Pour simplifier nous supposerons que l, m, n soient cosinus directeurs ; on a alors

$$\sum l^2 = 1, \qquad \sum l\,dl = 0;$$

et l'équation différentielle devient

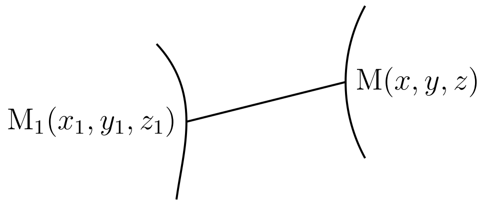
$$\sum l\,df + du = 0,$$

d'où

$$u = -\int \sum l\,df.$$

La détermination des trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface réglée dépend d'une quadrature.

Remarque. On peut rattacher ce fait à la formule qui donne la variation d'un segment de droite. Prenons sur la droite MM_1 une direction positive ; soit r la distance MM_1, prise en valeur absolue. Soient (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1), les



coordonnées des deux extrémités, qui décrivent deux courbes données. Nous avons

$$r^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2,$$

d'où

$$r\,dr = (x_1 - x)(dx_1 - dx) + (y_1 - y)(dy_1 - dy) + (z_1 - z)(dz_1 - dz),$$

d'où

$$dr = \left(\frac{x_1 - x}{r}\,dx_1 + \frac{y_1 - y}{r}\,dy_1 + \frac{z_1 - z}{r}\,dz_1\right) - \left(\frac{x_1 - x}{r}\,dx + \frac{y_1 - y}{r}\,dy + \frac{z_1 - z}{r}\,dz\right).$$

Soient α, β, γ, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les tangentes aux courbes en MM_1 dirigées dans le sens des arcs croissants. Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de la droite MM_1. Nous avons

$$dr = ds_1(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1) - ds(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma);$$

soient θ, θ_1 les angles de MM_1 avec les deux tangentes ; nous avons enfin la *formule importante*

$$dr = ds_1\,\cos\theta_1 - ds\,\cos\theta.$$

Supposons la droite MM_1 tangente à la première courbe et normale à la deuxième, $\theta = 0$, $\theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$; nous avons

$$dr = -ds$$

et nous retrouvons ainsi les propriétés des développantes et des développées.

Supposons la droite normale aux deux courbes, $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$, alors $dr = 0$, $r = \text{const.}$, et nous retrouvons les propriétés des trajectoires orthogonales des génératrices.

Cône directeur. Point central. Ligne de striction.

7. On appelle *cône directeur* de la surface le cône

$$x = u\,l(v), \qquad y = u\,m(v), \qquad z = u\,n(v).$$

Si ce cône se réduit à un plan, ce plan s'appelle *plan directeur*, et les génératrices sont toutes parallèles à ce plan.

Le plan tangent en un point quelconque de la surface a pour coefficients les déterminants déduits de :

$$\begin{Vmatrix} l & m & n \\ df + u\,dl & dg + u\,dm & dh + u\,dn \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Le plan tangent au cône directeur le long de la génératrice correspondant à celle qui passe par le point considéré a pour coefficients les déterminants déduits de

$$\begin{Vmatrix} l & m & n \\ dl & dm & dn \end{Vmatrix}.$$

Ces plans sont parallèles si u est infini. On a alors sur la surface le plan tangent au point à l'infini sur la génératrice qu'on appelle *plan asymptote. Les plans asymptotes sont parallèles aux plans tangents au cône directeur le long des génératrices correspondantes.*

Dans une surface à plan directeur, tous les plans asymptotes sont parallèles au plan directeur.

Pour que les deux plans tangents soient rectangulaires, il faut que la somme des produits des déterminants précédents soit nulle

$$\begin{vmatrix} \sum l^2 & \sum l\,df + u \sum l\,dl \\ \sum ldl & \sum dl\,df + u \sum dl^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons une équation du premier degré en u. *Il existe donc en général sur toute génératrice un point où le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent au cône directeur, c'est-à-dire au plan asymptote. C'est le point central*, le plan tangent en ce point s'appelle *plan central.*

Le lieu des points centraux s'appelle *ligne de striction.*

Nous supposerons pour simplifier $\sum l^2 = 1$, ce qui écarte le cas des surfaces réglées à génératrices isotropes. L'équation qui donne l'u du point central se réduit à

$$u \sum dl^2 + \sum dl\,df = 0;$$

le point central existe donc toujours, sauf si l'on a

$$\sum dl^2 = 0.$$

Dans ce cas la courbe sphérique base du cône directeur est une courbe minima de la sphère, c'est-à-dire, une génératrice isotrope. Le cône est alors un plan tangent au cône asymptote de la sphère, qui est un cône isotrope, c'est un plan isotrope. Les surfaces considérées sont des *surfaces réglées à plan directeur isotrope.* Toutes sont imaginaires, sauf le paraboloïde de révolution.

Remarque. Le plan tangent est indéterminé si tous les déterminants du tableau (1) sont nuls. Alors K étant un certain facteur, on a

$$df + u\,dl + \mathrm{K}l = 0, \qquad dg + u\,dm + \mathrm{K}m = 0, \qquad dh + u\,dn + \mathrm{K}n = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} df & dl & l \\ dg & dm & m \\ dh & dn & n \end{vmatrix} = 0;$$

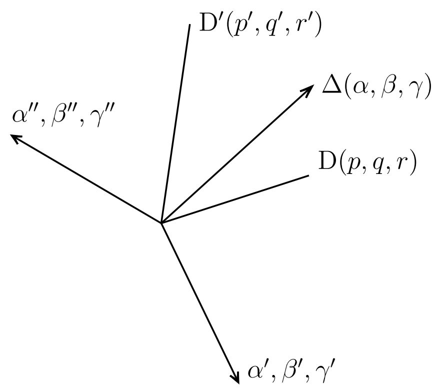
la surface est développable. Pour trouver le point où le plan tangent est indéterminé multiplions par dl, dm, dn et ajoutons, il vient

$$u \sum dl^2 + \sum dl\,df = 0;$$

c'est le point de contact de la génératrice et de l'arête de rebroussement. C'est ce qui explique que la formule précédente qui donne la ligne de striction pour une surface réglée quelconque, donne l'arête de rebroussement pour une surface développable.

Variations du plan tangent le long d'une génératrice.

8. Proposons-nous de chercher l'angle des plans tangents à une surface réglée en 2 points d'une même génératrice. A cet effet, traitons d'abord le problème suivant : on a une droite Δ, de cosinus directeurs α, β, γ, et deux droites qui la rencontrent $\mathrm{D}(p, q, r)$ et $\mathrm{D}'(p', q', r')$. Calculons l'angle V des deux plans $\mathrm{D}\Delta$ et $\mathrm{D}'\Delta$.



Considérons un trièdre trirectangle auxiliaire dont l'un des axes soit Δ ; soient α', β', γ', $\alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus directeurs des autres axes, et soient dans ce système u, v, w et u', v', w' les coefficients de direction de $\Delta\Delta'$. Nous avons

$$\operatorname{tg} \mathrm{V} = \frac{vw' - wv'}{vv' + ww'}.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} u &= \alpha p + \beta q + \gamma r, & v &= \alpha' p + \beta' q + \gamma' r, & w &= \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r \\ u' &= \alpha p' + \beta q' + \gamma r', & v' &= \alpha' p' + \beta' q' + \gamma' r', & w' &= \alpha'' p' + \beta'' q' + \gamma'' r', \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} vw' - wv' &= \begin{vmatrix} \alpha' p + \beta' q + \gamma' r & \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r \\ \alpha' p' + \beta' q' + \gamma' r' & \alpha'' p' + \beta'' q' + \gamma'' r' \end{vmatrix} \\ &= \begin{Vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$uu' + vv' + ww' = pp' + qq' + rr',$$

d'où

$$vv' + ww' = pp' + qq' + rr' - \sum \alpha p \sum \alpha p'.$$

Alors

$$\operatorname{tg} \mathrm{V} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}}{\sum pp' - \sum \alpha p \sum \alpha p'} = \frac{\mathrm{D} \sum \alpha^2}{\sum \alpha^2 \sum pp' - \sum \alpha p \sum \alpha p'}.$$

Sous cette forme, on peut alors introduire les coefficients directeurs l, m, n de la direction Δ

$$\operatorname{tg} \mathrm{V} = \frac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \begin{vmatrix} l & m & n \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}}{\sum l^2 \sum pp' - \sum lp \sum lp'}. \tag{1}$$

Appliquons cette formule à l'angle des plans tangents en deux points M, M′ d'une même génératrice. On peut prendre pour directions D, D′ les directions tangentes aux courbes $u = \text{const.}$:

$$\begin{aligned} p &= df + u\,dl, & q &= dg + u\,dm, & r &= dh + u\,dn; \\ p' &= df + u'\,dl, & q' &= dg + u'\,dm, & r' &= dh + u'\,dn; \end{aligned}$$

le déterminant de la formule (1) devient

$$\begin{vmatrix} l & df + u\,dl & df + u'\,dl \\ m & dg + u\,dm & dg + u'\,dm \\ n & dh + u\,dn & dh + u'\,dn \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l & dl & df \\ m & dm & dg \\ n & dn & dh \end{vmatrix} (u - u');$$

et

$$\operatorname{tg} \mathrm{V} = \frac{(u' - u)\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \begin{vmatrix} df & dg & dh \\ dl & dm & dn \\ l & m & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum l^2 & \sum l(df + u\,dl) \\ \sum l(df + u'\,dl) & \sum (df + u\,dl)(df + u'\,dl) \end{vmatrix}}.$$

Nous poserons

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} df & dg & dh \\ dl & dm & dn \\ l & m & n \end{vmatrix}.$$

Pour simplifier ce résultat, nous prendrons pour l, m, n les cosinus directeurs de la génératrice ($\sum l^2 = 1$, $\sum l\,dl = 0$) ; nous supposerons que la courbe $x = f(v)$, $y = g(v)$, $z = h(v)$ soit trajectoire orthogonale des génératrices, $\sum l\,df = 0$. Nous déterminerons u par la relation

$$u \sum dl^2 + \sum dl\,df = 0$$

ce qui revient à prendre pour l'un des points le point central. Le dénominateur devient

$$\sum df^2 + u \sum dl\,df = \frac{\sum df^2 \sum dl^2 - \left(\sum dl\,df\right)^2}{\sum dl^2};$$

et alors

$$\operatorname{tg} \mathrm{V} = \frac{(u' - u)\mathrm{D} \sum dl}{\sum df^2\,dl^2 - \left(\sum dl\,df\right)^2}.$$

Posons

$$\mathrm{K} = \frac{\sum dl^2 \sum df^2 - \left(\sum dl\,df\right)^2}{\mathrm{D} \sum dl^2};$$

en remarquant que $u' - u = \mathrm{CM}$, on a

$$\operatorname{tg} \mathrm{V} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{K}}, \tag{2}$$

formule de Chasles. D'où les conséquences bien connues suivantes, et qui ne sont en défaut que pour des génératrices singulières :

1°. *Lorsque* M *décrit la génératrice d'un bout à l'autre, le plan tangent* (P) *en* M *tourne autour de la génératrice toujours dans le même sens, et la rotation totale qu'il effectue est de* 180°. En deux points différents, les plans tangents sont différents.

2°. *La division des points* M *et le faisceau des plans* (P) *sont en correspondance homographique.*

3°. Comme trois couples définissent une homographie, *deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune, et qui sont tangentes en trois points de cette génératrice, sont tangentes en tous les autres points de cette génératrice*, c'est-à-dire se raccordent tout le long de cette génératrice. L'expression de K peut se simplifier ; on a :

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \sum df^2 & \sum dl\,df & \sum l\,df \\ \sum dl\,df & \sum dl^2 & \sum l\,dl \\ \sum l\,df & \sum l\,dl & \sum l^2 \end{vmatrix} = \sum dl^2 \sum df^2 - \left(\sum dl\,df\right)^2,$$

d'où

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{D}}{\sum dl^2}. \tag{3}$$

Dans le cas général, on trouve de même

$$K = \frac{D \sum l^2}{\sum l^2 \sum dl^2 - \left(\sum l\, dl\right)^2}. \tag{4}$$

K est le *paramètre de distribution* ; il est rationnel. La formule (2) montre que, si M se déplace dans une direction quelconque sur la génératrice, le plan tangent tourne, par rapport à cette direction, dans le sens positif de rotation, si K est positif ; et tourne dans le sens négatif, si K est négatif.

La signe de K correspond donc à une propriété géométrique de la surface. D'après (3) ou (4), *le paramètre de distribution est nul pour une surface développable.*

Remarque. Soient sur une même génératrice deux points M, M′ où les plans tangents soient rectangulaires. On a

$$\operatorname{tg} V \operatorname{tg} V' = -1,$$

d'où, en vertu de (2),

$$CM\, CM' = -K^2;$$

les points d'une génératrice où les plans tangents sont rectangulaires forment une involution dont C *est le point central.*

Exemple 1. *Surface engendrée par les binormales d'une courbe gauche.*

Soit la courbe

$$x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad z = h(s);$$

avec les notations habituelles, nous avons

$$\begin{array}{ccc} df = a\, ds, & dg = b\, ds, & dh = c\, ds, \\ l = a'', & m = b'', & n = c'', \end{array}$$

et

$$dl = \frac{a'}{T}\, ds, \qquad dm = \frac{b'}{T}\, ds, \qquad dn = \frac{c'}{T}\, ds.$$

Le point central est ici défini par $u = 0$; la courbe est ligne de striction. Le paramètre de distribution est

$$K = T^2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{a'}{T} & \dfrac{b'}{T} & \dfrac{c'}{T} \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = T;$$

le paramètre de distribution est égal au rayon de torsion de la courbe au point correspondant. La courbe est ligne de striction, trajectoire orthogonale des génératrices et géodésique.

Exemple 2. Surface engendrée par les normales principales à une courbe. On a ici

$$\begin{aligned}
df &= a\,ds, & dg &= b\,ds, & dh &= c\,ds,\\
l &= a', & m &= b', & n &= c',\\
dl &= -\frac{a}{\mathrm{R}} - \frac{a''}{\mathrm{T}}\,ds, & dm &= -\frac{b}{\mathrm{R}} - \frac{b''}{\mathrm{T}}\,ds, & dn &= -\frac{c}{\mathrm{R}} - \frac{c''}{\mathrm{T}}\,ds;
\end{aligned}$$

le point central est défini par

$$u = \frac{\sum a\left(\frac{a}{\mathrm{R}} + \frac{a''}{\mathrm{T}}\right)}{\sum\left(\frac{a}{\mathrm{R}} + \frac{a''}{\mathrm{T}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\mathrm{R}}}{\frac{1}{\mathrm{R}^2} + \frac{1}{\mathrm{T}^2}} = \frac{\mathrm{RT}^2}{\mathrm{R}^2 + \mathrm{T}^2} = \mathrm{MC},$$

et on a :

$$\mathrm{K} = -\frac{\mathrm{R}^2\mathrm{T}^2}{\mathrm{R}^2+\mathrm{T}^2}\begin{vmatrix} a & b & c\\ \frac{a}{\mathrm{R}} + \frac{a''}{\mathrm{T}} & \frac{b}{\mathrm{R}} + \frac{b''}{\mathrm{T}} & \frac{c}{\mathrm{R}} + \frac{c''}{\mathrm{T}}\\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{R}^2\mathrm{T}}{\mathrm{R}^2+\mathrm{T}^2}.$$

Cherchons le plan tangent au centre de courbure O. Nous avons

$$\operatorname{tg}\mathrm{V} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{MO}-\mathrm{MC}}{\mathrm{K}} = \frac{1}{\mathrm{K}}\left(\mathrm{R} - \frac{\mathrm{RT}^2}{\mathrm{R}^2+\mathrm{T}^2}\right) = \frac{1}{\mathrm{K}}\,\frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}^2+\mathrm{T}^2} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}};$$

pour le point M, qui est sur la courbe on a

$$\operatorname{tg}\mathrm{V} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{K}} = -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}},$$

donc

$$\operatorname{tg}\mathrm{V}\ \operatorname{tg}\mathrm{V}' = -1.$$

Les plans tangents en M et O sont rectangulaires, ce qui est un cas particulier d'une proposition que nous verrons plus loin (N° 12).

Élément linéaire.

9. Cherchons l'élément linéaire d'une surface réglée :

$$x = f(v) + u\,l(v) \qquad y = g(v) + u\,m(v) \qquad z = h(v) + u\,n(v).$$

En désignant par des accents les dérivées par rapport à v, il vient :

$$dx = (f' + ul')\,dv + l\,du, \quad dy = (g' + um')\,dv + m\,du, \quad dz = (h' + un')\,dv + n\,du$$

et

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

avec :

$$\mathrm{E} = \sum l^2, \quad \mathrm{F} = u\sum ll' + \sum lf', \quad \mathrm{G} = u^2\sum l'^2 + 2u\sum l'f' + \sum f'^2.$$

Supposons que l, m, n soient les cosinus directeurs :

$$\sum l^2 = 1, \qquad \sum ll' = 0,$$
$$\mathrm{E} = 1, \qquad \mathrm{F} = \sum lf', \qquad \mathrm{G} = u^2\sum l'^2 + 2u\sum l'f' + \sum f'^2.$$

Ces résultats s'obtiennent directement en faisant le changement de paramètre

$$\sqrt{\mathrm{E}}\, u = u';$$

d'où

$$du' = \sqrt{\mathrm{E}}\, du + u\,\frac{\dfrac{d\mathrm{E}}{dv}}{2\sqrt{\mathrm{E}}}\, dv.$$

Nous avons alors, en supprimant les accents,

$$ds^2 = du^2 + 2\mathrm{F}du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2.$$

Supposons de plus que la courbe $x = f(v), y = g(v), z = h(v)$ soit trajectoire orthogonale des génératrices, alors $\sum lf' = 0$, $\mathrm{F} = 0$, et on a

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}\,dv^2;$$

il est évident que l'élément linéaire doit avoir cette forme, car on a un système de coordonnées orthogonales. On arrive aussi à cette expression en posant

$$du + \mathrm{F}\,dv = du',$$

d'où

$$u' = u + \int \mathrm{F}\,dv,$$

ce qui exige une quadrature. La variable u est définie à une constante près, c'est une longueur portée sur chaque génératrice à partir de la même trajectoire orthogonale. Pour définir la variable v, considérons la direction de la génératrice $x = l$, $y = m$, $z = n$. Ces équations sont celles de la trace du cône directeur sur la sphère de rayon 1 ; nous prendrons pour v l'arc de cette courbe ; alors $\sum l'^2 = 1$, et

$$\mathrm{G} = u^2 + 2u\sum l'f' + \sum f'^2.$$

Posons

$$\sum l'f' = \mathrm{G}_0, \qquad \sum f'^2 = \mathrm{G}_1,$$

nous avons

$$\mathrm{G} = u + 2u\mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_1;$$

les quantités $\mathrm{G}_0, \mathrm{G}_1$, ainsi introduites sont liées d'une façon simple au point central et au paramètre de distribution. Considérons l'involution des points M, M'

où les plans tangents sont rectangulaires ; son point central est le point central de la génératrice, et on a, en désignant par K le paramètre de distribution,

$$\mathrm{CM}\cdot\mathrm{CM}' = -\mathrm{K}^2.$$

Le plan tangent en un point u de la génératrice a pour coefficients les déterminants déduits du tableau

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ f'+ul' & g'+um' & h'+un' \end{Vmatrix};$$

de même le plan tangent au point u' aura pour coefficients les déterminants déduits du tableau

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ f'+u'l' & g'+u'm' & h'+u'n' \end{Vmatrix}.$$

Exprimons que ces plans tangents sont rectangulaires. La somme des produits des déterminants précédents, et par suite le produit des tableaux, doit être nul, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{G}_1+(u+u')\mathrm{G}_0+uu' \end{vmatrix} = 0;$$

la relation d'involution est donc

$$uu' + (u+u')\mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_1 = 0,$$

ou

$$(u+\mathrm{G}_0)(u'+\mathrm{G}_0) = \mathrm{G}_0^2 - \mathrm{G}_1.$$

$u+\mathrm{G}_0$ doit représenter CM ; si donc I est l'intersection de la génératrice avec la trajectoire orthogonale $u=0$, on a

$$u+\mathrm{G}_0 = \mathrm{CM} = \mathrm{IM} - \mathrm{IC};$$

mais $\mathrm{IM} = u$, donc $\mathrm{G}_0 = -\mathrm{IC}$, $-\mathrm{G}_0$ est l'u du point central ; posons

$$\mathrm{P} = -\mathrm{G}_0 = -\sum l'f'.$$

De plus

$$\mathrm{G}_0^2 - \mathrm{G}_1 = -\mathrm{K}^2,$$

d'où

$$\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_0^2 + \mathrm{K}^2 = \mathrm{P}^2 + \mathrm{K}^2 = \sum f'^2;$$

alors

$$\mathrm{G} = u^2 - 2u\mathrm{P} + \mathrm{P}^2 + \mathrm{K}^2 = (u-\mathrm{P})^2 + \mathrm{K}^2.$$

Finalement, *si l, m, n sont les cosinus directeurs de la génératrice, v l'arc de la trace du cône directeur sur la sphère de rayon 1, u la longueur portée sur la génératrice à partir d'une trajectoire orthogonale, on a*

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + \left[(u-\mathrm{P})^2 + \mathrm{K}^2\right] dv^2,$$

P *étant l'u du point central et* K *le paramètre de distribution.*

Remarque. Ceci peut servir à calculer le paramètre de distribution. On a

$$\begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ l' & m' & n' \\ l & m & n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \mathrm{G}_1 & \mathrm{G}_0 & 0 \\ \mathrm{G}_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{G}_1 - \mathrm{G}_0^2 = \mathrm{K}^2,$$

et on peut écrire

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{K} = \begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ l' & m' & n' \\ l & m & n \end{vmatrix}, \qquad \mathrm{P} = -\sum l'f'.$$

Réciproquement, soit une surface dont l'élément linéaire soit de la forme

$$ds^2 = du^2 + \big[(u-\mathrm{P})^2 + \mathrm{K}^2\big]dv^2;$$

cherchons s'il y a des surfaces réglées applicables sur cette surface ; les éléments d'une telle surface réglée seront déterminés par les relations

$$\sum l^2 = 1, \quad \sum lf' = 0, \quad \sum l'^2 = 1, \quad \sum l'f' = -\mathrm{P}, \quad \sum f'^2 = \mathrm{K}^2 + \mathrm{P}^2;$$

la dernière de ces relations s'écrit, d'après l'expression de K,

$$\sum f'(mn' - nm') = -\mathrm{K}.$$

Nous pouvons d'abord nous donner arbitrairement le cône directeur de façon à satisfaire $\sum l^2 = 1$, $\sum l'^2 = 1$. Il reste alors à satisfaire à trois équations linéaires en f', g', h' dont le déterminant n'est pas nul ; f', g', h' seront alors parfaitement déterminés, f, g, h le seront à une constante additive près, ce qui revient à ajouter à x, y, z des quantités constantes, c'est-à-dire à faire subir à la surface une translation. *Lorsqu'on a une surface réglée, il y a donc une infinité de surfaces réglées applicables sur elle, les génératrices correspondant aux génératrices* puisqu'on peut prendre arbitrairement le cône directeur. Remarquons que dans l'élément linéaire figure, non pas K, mais K^2, de sorte qu'en particulier *il existe deux surfaces réglées ayant même cône directeur, des paramètres de distribution égaux et de signes contraires et applicables l'une sur l'autre.*

Pour avoir explicitement f, g, h, résolvons le système des équations linéaires

$$\sum lf' = 0, \qquad \sum l'f' = -\mathrm{P}, \qquad \sum (mn' - nm')f' = -\mathrm{K};$$

l, m, n, l', m', n' sont ici cosinus directeurs de deux directions rectangulaires. Introduisons une nouvelle direction de cosinus l_2, m_2, n_2 formant avec les deux précédentes un trièdre trirectangle

$$l_2 = mn' - nm', \qquad m_2 = nl' - ln', \qquad n_2 = lm' - ml'.$$

Le système devient

$$\sum lf' = 0, \qquad \sum l'f' = -\mathrm{P}, \qquad \sum l_2 f' = -\mathrm{K};$$

d'où

$$(3)\qquad \begin{cases} f' = -\mathrm{P}l' \;\; - \mathrm{K}(mn' - nm'), \\ g' = -\mathrm{P}m' - \mathrm{K}(nl' - ln'), \\ h' = -\mathrm{P}n' \;\; - \mathrm{K}(lm' - ml'). \end{cases}$$

On a f, g, h par des quadratures.

La forme Ψ et les lignes asymptotiques.

10. Nous avons

$$\Psi(du, dv) = \sum \mathrm{A}d^2x = \begin{vmatrix} d^2x & d^2y & d^2z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (f'' + ul'')\,dv^2 + 2l'\,du\,dv & \dots \\ 1 & \dots \\ f' + ul' & \dots \end{vmatrix}$$

on a pour Ψ une expression de la forme

$$\Psi(du, dv) = 2\mathrm{F}'\,du\,dv + \mathrm{G}'\,dv^2,$$

F' étant fonction de v et G' un trinôme du deuxième degré en u. Nous trouvons naturellement pour lignes asymptotiques les courbes $dv = 0$, $v = \text{const.}$ qui sont les génératrices. Les autres lignes asymptotiques sont déterminées par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\mathrm{G}'}{2\mathrm{F}'},$$

ou

$$(1)\qquad \frac{du}{dv} = \mathrm{R}u^2 + 2\mathrm{S}u + \mathrm{T},$$

$\mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{T}$ étant fonctions de v. C'est une *équation de Riccati*. Rappelons ses propriétés.

Équation de Riccati.

1°. *Supposons qu'on ait une solution* u_1, de cette équation. Posons

$$(2)\qquad u = u_1 + \frac{1}{w},$$

d'où

$$du = du_1 - \frac{dw}{w^2}.$$

L'équation (1) devient

$$\frac{du_1}{dv} - \frac{1}{w^2}\frac{dw}{dv} = \mathrm{R}u_1^2 + 2\mathrm{R}\frac{u_1}{w} + \mathrm{R}\frac{1}{w^2} + 2\mathrm{S}u_1 + 2\mathrm{S}\frac{1}{w} + \mathrm{T};$$

mais u_1 étant intégrale de (1), on a

$$\frac{du_1}{dv} = \mathrm{R}u_1^2 + 2\mathrm{S}u_1 + \mathrm{T},$$

de sorte que l'équation devient

$$-\frac{dw}{dv} = 2(\mathrm{R}u_1 + \mathrm{S})w + \mathrm{R},$$

ou

$$\frac{dw}{dv} = \mathrm{Q}w - \mathrm{R}. \tag{3}$$

C'est une équation linéaire dont *l'intégration s'effectue par deux quadratures.*

2°. *Supposons qu'on ait deux intégrales* u_2, u_1 de l'équation. Posons

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{w_0},$$

d'où

$$w_0 = \frac{1}{u_2 - u_1};$$

w_0 sera une intégrale de l'équation (3). Posons alors

$$w = w_0 + \theta, \tag{4}$$

d'où

$$dw = dw_0 + d\theta;$$

(3) devient

$$\frac{dw_0}{dv} + \frac{d\theta}{dv} = \mathrm{Q}w_0 + \mathrm{Q}\theta - \mathrm{R};$$

ou, comme w est intégrale de (3)

$$\frac{d\theta}{dv} = \mathrm{Q}\theta,$$

équation linéaire sans deuxième membre qui s'intègre immédiatement *par une seule quadrature* :

$$\frac{d\theta}{\theta} = \mathrm{Q}\,dv, \tag{5}$$

$$\log\theta = \int \mathrm{Q}\,dv,$$

$$\theta = e^{\mathrm{Q}\,dv}.$$

3°. *Supposons qu'on ait trois intégrales* u_1, u_2, u_3 de l'équation (1). On a alors deux intégrales de l'équation (3). Soit

$$w_1 = \frac{1}{u_0 - u_1};$$

w_1 est intégrale de (3), et par suite on a une intégrale θ_0 de (5)

$$\theta_0 = w_1 - w_0 = \frac{1}{u_3 - u_1} - \frac{1}{u_2 - u_1} = \frac{u_2 - u_3}{(u_3 - u_1)(u_2 - u_1)}.$$

Posons

$$\theta = \theta_0 \psi,$$
$$d\theta = \theta_0\, d\psi + \psi\, d\theta_0;$$

(5) devient

$$\theta_0 \frac{d\psi}{dv} + \psi \frac{d\theta_0}{dv} = \mathrm{Q}\psi\theta_0,$$

ou, comme θ_0 est intégrale de (5),

$$\theta_0 \frac{d\psi}{dv} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dv} = 0.$$

ψ est une constante C, et l'intégrale générale de (5) est

$$\theta = \mathrm{C}\,\theta_0. \tag{6}$$

L'équation s'intègre complètement par des opérations algébriques. Si nous cherchons l'expression de l'intégrale générale u en fonction des intégrales particulières u_1, u_2, u_3, nous avons, en vertu de (2), (4), (6),

$$u = u_1 + \frac{1}{w} = u_1 + \frac{1}{\dfrac{1}{u_2 - u_1} + \theta} = u_1 + \frac{1}{\dfrac{1}{u_2 - u_1} + \mathrm{C}\dfrac{u_2 - u_3}{(u_3 - u_1)(u_2 - u_1)}},$$

d'où

$$\frac{1}{u - u_1} = \frac{1}{u_2 - u_1} + \frac{\mathrm{C}(u_2 - u_3)}{(u_3 - u_1)(u_2 - u_1)} = \frac{u_3 - u_1 + \mathrm{C}(u_2 - u_3)}{(u_3 - u_1)(u_2 - u_1)},$$

d'où

$$\mathrm{C}(u_2 - u_3) = \frac{(u_3 - u_1)(u_2 - u_1)}{u - u_1} - (u_3 - u_1) = \frac{(u_3 - u_1)(u_2 - u)}{(u - u_1)},$$

$$\mathrm{C} = \frac{u - u_2}{u - u_1} : \frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1}, \tag{7}$$

ou

$$(u\ u_1\ u_2\ u_3) = \mathrm{C}.$$

Ainsi le rapport anharmonique de quatre intégrales quelconques d'une équation de Riccati est constant. En remarquant que, dans le cas présent, ces intégrales sont précisément les u des points d'intersection d'une génératrice quelconque avec les asymptotiques, on voit que *quatre lignes asymptotiques coupent les génératrices suivant un rapport anharmonique constant.*

Remarque. L'équation (7) résolue par rapport à u donne

$$u = \frac{\mathrm{VC} + \mathrm{V}_0}{\mathrm{V}_1\mathrm{C} + \mathrm{V}_2}, \tag{8}$$

$\mathrm{V}, \mathrm{V}_0, \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ étant fonctions de v. La constante arbitraire figure donc dans l'intégrale générale par une fraction du premier degré. Inversement toute fonction de la forme (8) satisfait à une équation de Riccati, car si on élimine la constante C au moyen d'une différentiation, on retrouve une équation différentielle de la forme (1).

Cas particuliers.

Si la surface réglée a une directrice rectiligne, cette directrice est une asymptotique, on a une solution particulière de l'équation de Riccati. La détermination des lignes asymptotiques se fait au moyen de deux quadratures. C'est le cas des *surfaces réglées à plan directeur*. Si la surface admet deux directrices rectilignes, ces deux droites sont des asymptotiques, et on a deux solutions particulières de l'équation de Riccati. C'est le cas des *surfaces conoïdes à plan directeur*. Il ne faut plus alors qu'une quadrature pour déterminer les lignes asymptotiques. En réalité, on peut les obtenir sans quadrature. Considérons en effet une surface réglée admettant deux directrices rectilignes. On peut effectuer une transformation homographique de façon que l'une des directrices s'en aille à l'infini, la surface se transforme en un conoïde à plan directeur. Soit

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

l'équation d'un tel conoïde. Posons

$$x = u, \qquad y = uv, \qquad z = \varphi(v);$$

les lignes asymptotiques sont telles que le plan osculateur coïncide avec le plan tangent ; ses coefficients doivent donc satisfaire aux relations

$$\mathrm{A}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{B}\frac{\partial y}{\partial u} + \mathrm{C}\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \qquad \mathrm{A}\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{B}\frac{\partial y}{\partial v} + \mathrm{C}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

ou

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}v = 0, \qquad \mathrm{B}u + \mathrm{C}\varphi'(v) = 0;$$

équations satisfaites si l'on prend $\mathrm{C} = -u$, $\mathrm{B} = \varphi'(v)$, $\mathrm{A} = -v\varphi'(v)$. On a alors

$$\Psi(du, dv) = \mathrm{A}\, d^2x + \mathrm{B}\, d^2y + \mathrm{C}\, d^2z = 0;$$

mais $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ étant les coefficients du plan tangent, on a

$$\mathrm{A}\, dx + \mathrm{B}\, dy + \mathrm{C}\, dz = 0;$$

en différentiant cette relation, on voit qu'on peut mettre l'équation différentielle des lignes asymptotiques sous la forme

$$d\mathrm{A}\, dx + d\mathrm{B}\, dy + d\mathrm{C}\, dz = 0,$$

ou

$$\begin{gathered} -du\big[\varphi'(v)\, dv + v\varphi''(v)\, dv\big] + \varphi''(v)\, dv(v\, du + u\, dv) - du\, \varphi'(v)\, dv = 0, \\ u\varphi''(v)\, dv^2 - 2\varphi'(v)\, du\, dv = 0; \end{gathered}$$

nous trouvons la solution $v = \text{const.}$ qui nous donne les génératrices, et il reste

$$\frac{\varphi''(v)\, dv}{\varphi'(v)} = \frac{2\, du}{u},$$

d'où

$$\mathrm{L}\varphi'(v) = \mathrm{L}u^2 - \mathrm{LC},$$

d'où

$$u^2 = \mathrm{C} + \varphi'(v);$$

on a ainsi les lignes asymptotiques d'un conoïde sans quadrature.

Remarque. S'il y a trois directrices rectilignes, la surface est une surface du second degré, et est doublement réglée.

Calcul de Ψ.

Cherchons l'expression générale de la forme Ψ. Introduisons pour cela les variables canoniques u, v qui nous ont permis d'arriver à la forme de l'élément linéaire. Considérons le trièdre de Serret de la courbe (Σ) tracé du cône directeur sur la sphère de rayon 1. La génératrice (l, m, n) est dans le plan normal à cette courbe : soit θ son angle avec la normale principale ; avec les notations habituelles, nous avons :

$$l = a'\cos\theta + a''\sin\theta, \qquad m = b'\cos\theta + b''\sin\theta, \qquad n = c'\cos\theta + c''\sin\theta;$$

d'où

$$l' = a = \theta'(-a'\sin\theta + a''\cos\theta) - \cos\theta\left(\frac{a}{\mathrm{R}} + \frac{a''}{\mathrm{T}}\right) + \sin\theta\,\frac{a'}{\mathrm{T}},$$

et les analogues ; d'où

$$\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}} = -1, \qquad \theta' = \frac{1}{\mathrm{T}}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} mn' - nm' = mc - nb &= a'\sin\theta - a''\cos\theta,\\ nl' - ln' &= b'\sin\theta - b''\cos\theta,\\ lm' - ml' &= c'\sin\theta - c''\cos\theta; \end{aligned}$$

et nous obtenons, au moyen des formules (3) du N° 9,

$$\begin{aligned} f' + ul' &= (u-\mathrm{P})l' - \mathrm{K}(mn' - nm') = (u-\mathrm{P})a - \mathrm{K}\sin\theta\, a' + \mathrm{K}\cos\theta\, a'',\\ g' + um' &= (u-\mathrm{P})m' - \mathrm{K}(nl' - ln') = (u-\mathrm{P})b - \mathrm{K}\sin\theta\, b' + \mathrm{K}\cos\theta\, b'',\\ h' + un' &= (u-\mathrm{P})n' - \mathrm{K}(lm' - ml') = (u-\mathrm{P})c - \mathrm{K}\sin\theta\, c' + \mathrm{K}\cos\theta\, c'', \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} f'' + ul'' = -\mathrm{P}'a + \frac{u-\mathrm{P}}{\mathrm{R}}a' - \mathrm{K}'\sin\theta\, a' - \frac{\mathrm{K}\cos\theta}{\mathrm{T}}a' + \mathrm{K}\sin\theta\left(\frac{a}{\mathrm{R}} + \frac{a''}{\mathrm{T}}\right)&\\ + \mathrm{K}'\cos\theta\, a'' - \frac{\mathrm{K}\sin\theta}{\mathrm{T}}a'' + \mathrm{K}\cos\theta\,\frac{a'}{\mathrm{T}},& \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
f'' + ul'' &= a\left(\frac{\mathrm{K}\sin\theta}{\mathrm{R}} - \mathrm{P}'\right) + a'\left(\frac{u-\mathrm{P}}{\mathrm{R}} - \mathrm{K}'\sin\theta\right) + a''\,\mathrm{K}'\cos\theta,\\
g'' + um'' &= b\left(\frac{\mathrm{K}\sin\theta}{\mathrm{R}} - \mathrm{P}'\right) + b'\left(\frac{u-\mathrm{P}}{\mathrm{R}} - \mathrm{K}'\sin\theta\right) + b''\,\mathrm{K}'\cos\theta,\\
h'' + un'' &= c\left(\frac{\mathrm{K}\sin\theta}{\mathrm{R}} - \mathrm{P}'\right) + c'\left(\frac{u-\mathrm{P}}{\mathrm{R}} - \mathrm{K}'\sin\theta\right) + c''\,\mathrm{K}'\cos\theta,
\end{aligned}$$

Alors

$$\Psi = \begin{vmatrix}
\left[\begin{aligned} &2a\,du\,dv + dv^2\Bigl[a\left(\frac{\mathrm{K}\sin\theta}{\mathrm{R}} - \mathrm{P}'\right)\\ &\qquad + a'\left(\frac{u-\mathrm{P}}{\mathrm{R}} - \mathrm{K}'\sin\theta\right) + a''\,\mathrm{K}'\cos\theta\Bigr]\end{aligned}\right] & \dots & \dots\\
(u-\mathrm{P})a - \mathrm{K}\sin\theta\, a' + \mathrm{K}\cos\theta\, a'' & \dots & \dots\\
a'\cos\theta + a''\sin\theta & \dots & \dots
\end{vmatrix},$$

ou

$$\Psi = \begin{vmatrix}
2\,du\,dv + \left(\frac{\mathrm{K}\sin\theta}{\mathrm{R}} - \mathrm{P}'\right)dv^2 & \left(\frac{u-\mathrm{P}}{\mathrm{R}} - \mathrm{K}'\sin\theta\right)dv^2 & \mathrm{K}'\cos\theta\,dv^2\\
u-\mathrm{P} & -\mathrm{K}\sin\theta & \mathrm{K}\cos\theta\\
0 & \cos\theta & \sin\theta
\end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\Psi = -\left[2\,du\,dv + \left(\frac{\mathrm{K}\sin\theta}{\mathrm{R}} - \mathrm{P}'\right)dv^2\right]\mathrm{K} - (u-\mathrm{P})\left[-\mathrm{K}' + (u-\mathrm{P})\frac{\sin\theta}{\mathrm{R}}\right]dv^2,$$

ou enfin

$$\Psi = -2\mathrm{K}\,du\,dv + \left\{(u-\mathrm{P})\mathrm{K}' + \mathrm{KP}' - \frac{\sin\theta}{\mathrm{R}}\left[(u-\mathrm{P})^2 + \mathrm{K}^2\right]\right\}dv^2.$$

Le seul élément nouveau qui intervient est la courbure géodésique $\dfrac{\sin\theta}{\mathrm{R}}$ de la courbe (Σ) sur la sphère. Cet élément suffit à déterminer (Σ) ; supposons en effet

$$\frac{\sin\theta}{\mathrm{R}} = \Phi(v);$$

nous avons

$$\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}} = -1, \qquad \frac{1}{\mathrm{T}} = \theta';$$

nous en déduisons

$$\mathrm{tg}\,\theta = -\Phi(v), \qquad \mathrm{R} = -\cos\theta, \qquad \mathrm{T} = \frac{dv}{d\theta}; \tag{1}$$

nous avons ainsi tous les éléments de la courbe (Σ).

Remarque. Les formules (1) nous permettent de trouver la condition pour qu'une courbe soit tracée sur la sphère de rayon 1. Nous avons en effet

$$\frac{d\mathrm{R}}{dv} = +\sin\theta\,\frac{d\theta}{dv} = \frac{\sin\theta}{\mathrm{R}},$$

d'où

$$\mathrm{R}^2 + \mathrm{T}^2\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)^2 = 1;$$

Ce qui exprime que le rayon de la sphère osculatrice est égal à 1.

Lignes de courbure.

11. L'équation différentielle des lignes de courbure est

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial ds^2}{\partial\, du} & \dfrac{\partial ds^2}{\partial\, dv} \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial\, du} & \dfrac{\partial \Psi}{\partial\, dv} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} du & \left[(u-\mathrm{P})^2+\mathrm{K}^2\right]dv \\ -\mathrm{K}\,dv & -\mathrm{K}\,du + \left[(u-\mathrm{P})\mathrm{K}' + \mathrm{KP}' - \dfrac{\sin\theta}{\mathrm{R}}\left[(u-\mathrm{P})^2+\mathrm{K}^2\right]\right]dv \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$-\,\mathrm{K}du^2 + \left[(u-\mathrm{P})\mathrm{K}' + \mathrm{KP}' - \Phi\left[(u-\mathrm{P})^2+\mathrm{K}^2\right]\right]du\,dv \\ + \mathrm{K}\left[(u-\mathrm{P})^2+\mathrm{K}^2\right]dv^2 = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des lignes de courbure, où Φ représente la courbure géodésique de la courbe (Σ).

Centre de courbure géodésique.

12. Considérons une trajectoire orthogonale des génératrices, par exemple $u = 0$,

$$x = f(v), \qquad y = g(v), \qquad z = h(v);$$

cherchons son centre de courbure géodésique. C'est le point où la droite polaire rencontre le plan tangent. Or, la génératrice étant normale à sa trajectoire orthogonale est l'intersection du plan normal et du plan tangent ; *le centre de courbure géodésique est donc à l'intersection de la droite polaire avec la génératrice.* Le plan normal est

$$\sum (x-f)f' = 0;$$

la caractéristique est définie par l'équation précédente et par

$$\sum (x-f)f'' - \sum f'^2 = 0.$$

Pour déterminer le centre de courbure géodésique, il suffit de déterminer l'u du point d'intersection de la droite précédente avec la génératrice

$$x = f(v) + ul(v), \qquad y = g(v) + um(v), \qquad z = h(v) + un(v).$$

La première équation se réduit à une identité, la deuxième donne

$$u \sum lf'' - \sum f'^2 = 0;$$

mais on a

$$\sum lf' = 0,$$

d'où

$$\sum l'f' + \sum lf'' = 0;$$

et l'équation qui donne l'u du point cherché devient

$$u \sum l'f' + \sum f'^2 = 0,$$

ou

$$-u\mathrm{P} + \mathrm{P}^2 + \mathrm{K}^2 = 0;$$

ou enfin :

$$\mathrm{P}(u - \mathrm{P}) = \mathrm{K}^2.$$

Si C est le point central, M le point considéré sur la trajectoire orthogonale, M′ le centre de courbure géodésique, l'équation précédente donne

$$\mathrm{CM} \cdot \mathrm{CM}' = -\mathrm{K}^2.$$

Donc les plans tangents en M, M′ sont rectangulaires. Ainsi le *centre de courbure géodésique en un point* M *d'une trajectoire orthogonale des génératrices d'une surface réglée est le point de la génératrice où le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent en* M.

Si nous considérons maintenant une courbe (c) tracée sur une surface quelconque (S) les normales à (c) tangentes à (S) engendrent une surface réglée (Σ) ; les surfaces (S), (Σ) étant tangentes tout le long de (c), la courbe (c) a même centre de courbure géodésique sur (S) et sur (Σ) ; ce qui permet de construire le centre de courbure géodésique d'une courbe tracée sur une surface quelconque.

EXERCICES.

21. Trouver les points de contact des plans isotropes menés par une génératrice quelconque d'une surface réglée. Quelles relations ont-ils avec le point central et le paramètre de distribution ?
22. Trouver les surfaces réglées dont les lignes asymptotiques interceptent sur les génératrices des segments égaux.
23. Trouver les surfaces réglées dont les lignes de courbure interceptent sur les génératrices des segments égaux.
24. Trouver les surfaces réglées dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre.

25. Trouver les lignes de courbure et les lignes géodésiques de l'hélicoïde développable.

26. Montrer que les lignes d'une surface (S) quelconque, pour lesquelles : $ds - \mathrm{R}_g\, d\varphi = 0$, sont caractérisées par cette propriété que, si l'on mène par chacun des points de l'une d'elles une tangente à la courbe $v = \text{const.}$, la surface réglée ainsi obtenue a pour ligne de striction la courbe considérée (voir exercice 11).

27. Étant donnée une surface S et une courbe C de cette surface, on considère la surface réglée G engendrée par les normales MN menées à S aux divers points M de C. Le point central de MN s'appelle le *métacentre* de S, correspondant au point M et à la tangente MT de C.

1°. Déterminer ce métacentre, le plan asymptote, le paramètre de distribution. Discuter la variation du métacentre quand la courbe (C) varie, en passant toujours en M.

2°. Montrer que le métacentre est le centre de courbure de la section droite du cylindre circonscrit à S, et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan asymptote de G.

3°. On suppose qu'on ait plusieurs surfaces S, et que l'on affecte chacune d'elles d'un coefficient numérique a. On considère comme homologues sur ces diverses surfaces les points M (pris un sur chaque surface) pour lesquels les plans tangents à ces diverses surfaces sont parallèles ; soit M_0 le centre des moyennes distances d'un tel système de points M homologues, et relatif au système des coefficients a. Soit S_0 la surface lieu des points M_0. Montrer qu'elle correspond à chacune des surfaces S par plans tangents parallèles ; et que si I_0 est le métacentre de S_0 correspondant aux divers métacentres I des surfaces S qui se trouvent associés dans la correspondance considérée, on a $(\sum a)\, \mathrm{M}_0\mathrm{I}_0 = \sum (a\, \mathrm{MI})$.

28. On donne une courbe gauche R, arête de rebroussement d'une développable Δ. Déterminer toutes les surfaces réglées satisfaisant aux conditions suivantes : chacune des génératrices G d'une telle surface est perpendiculaire à un plan tangent P de Δ, et le point de rencontre de G et de P est le point central de G. Soit alors Σ l'une de ces surfaces réglées, chacun des plans isotropes passant par une de ses génératrices enveloppe une développable. Montrer que le lieu des milieux des segments dont les extrémités décrivent, indépendamment l'un de l'autre, les arêtes de rebroussement de ces deux développables est une surface minima inscrite dans Δ.

CHAPITRE VI.

CONGRUENCES DE DROITES.

Points et plans focaux.

1. On appelle *congruence* un ensemble de droites dépendant de deux paramètres ; toutes les droites rencontrant deux droites fixes constituent une congruence ; de même les droites passant par un point fixe, les normales à une surface ; si sur une surface on considère une famille de courbes dépendant d'un paramètre, l'ensemble de leurs tangentes constitue une congruence.

Une droite d'une congruence pourra se représenter par les équations

$$\tag{1} \begin{cases} x = f(v,w) + u\,a(v,w), \\ y = g(v,w) + u\,b(v,w), \\ z = h(v,w) + u\,c(v,w). \end{cases}$$

Les équations

$$\tag{2} x = f(v,w), \qquad y = g(v,w), \qquad z = h(v,w)$$

définissent le *support* de la congruence, a, b, c définissent les directions des droites de la congruence passant par chaque point du support. Ce support sera en général une surface, et la congruence sera constituée par les droites de directions données passant par tous les points d'une surface. Il peut arriver que f, g, h ne dépendent que d'un seul paramètre, le support est alors une courbe, et par tout point de la courbe passent une infinité de droites de la congruence, qui constituent un cône. Enfin f, g, h peuvent se réduire à des constantes, et la congruence est constituée par toutes les droites passant par le point fixe de coordonnées f, g, h.

Supposons qu'on établisse une relation entre v, w ; cela revient à choisir ∞^1 droites de la congruence, qui constituent une surface réglée de la congruence. On retrouverait ainsi les équations générales d'une surface réglée. Considérons toutes les surfaces réglées passant par une droite D de la congruence. Deux de ces surfaces se raccordent en deux points de la droite D. Nous allons montrer que ces deux points sont indépendants des surfaces réglées que l'on considère. En d'autres termes *sur chaque droite* D *de la congruence il existe deux points* F, F' *auxquels correspondent deux plans* P, P' *passant par la droite* D *et tels que toutes les surfaces réglées de la congruence passant par la droite* D *ont pour plans tangents en* F, F' *respectivement les plans* P, P'. Ces points F, F' s'appellent *foyers* ou *points focaux* de la droite D, les plans P, P' sont les *plans focaux* associés à F, F'. Pour démontrer la proposition, cherchons le plan tangent en un point quelconque de la génératrice (1). Les paramètres $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ du plan tangent satisfont aux équations

$$\tag{3} \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c = 0,$$

$$\tag{3'} \mathrm{A}(df + u\,da) + \mathrm{B}(dg + u\,db) + \mathrm{C}(dh + u\,dc) = 0.$$

On peut choisir u de façon que le plan tangent soit indépendant des différentielles dv, dw, et par suite indépendant de la relation existant entre v, w, c'est-à-dire indépendant de la surface réglée. Développons la deuxième équation (3)

$$\begin{aligned}0 = &\left[\mathrm{A}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + u\frac{\partial a}{\partial v}\right) + \mathrm{B}\left(\frac{\partial g}{\partial v} + u\frac{\partial b}{\partial v}\right) + \mathrm{C}\left(\frac{\partial h}{\partial v} + u\frac{\partial c}{\partial v}\right)\right]dv \\ + &\left[\mathrm{A}\left(\frac{\partial f}{\partial w} + u\frac{\partial a}{\partial w}\right) + \mathrm{B}\left(\frac{\partial g}{\partial w} + u\frac{\partial b}{\partial w}\right) + \mathrm{C}\left(\frac{\partial h}{\partial w} + u\frac{\partial c}{\partial w}\right)\right]dw.\end{aligned}$$

Pour que le plan tangent soit indépendant de dv, dw, il suffit que l'on ait

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathrm{A}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v} + u\dfrac{\partial a}{\partial v}\right) + \mathrm{B}\left(\dfrac{\partial g}{\partial v} + u\dfrac{\partial b}{\partial v}\right) + \mathrm{C}\left(\dfrac{\partial h}{\partial v} + u\dfrac{\partial c}{\partial v}\right) = 0 \\ \mathrm{A}\left(\dfrac{\partial f}{\partial w} + u\dfrac{\partial a}{\partial w}\right) + \mathrm{B}\left(\dfrac{\partial g}{\partial w} + u\dfrac{\partial b}{\partial w}\right) + \mathrm{C}\left(\dfrac{\partial h}{\partial w} + u\dfrac{\partial c}{\partial w}\right) = 0 \end{cases}$$

Les relations (4) et la première des relations (3) doivent être satisfaites pour des valeurs non toutes nulles de $\mathrm{A, B, C}$, donc on doit avoir

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} + u\dfrac{\partial a}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} + u\dfrac{\partial b}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} + u\dfrac{\partial c}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial w} + u\dfrac{\partial a}{\partial w} & \dfrac{\partial g}{\partial w} + u\dfrac{\partial b}{\partial w} & \dfrac{\partial h}{\partial w} + u\dfrac{\partial c}{\partial w} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation qui donne les u des points focaux ; elle est du deuxième degré, donc il y a deux points focaux ; le plan focal correspondant à chacun d'eux aura pour coefficients les valeurs de $\mathrm{A, B, C}$ satisfaisant aux équations (3) et (4).

Surfaces focales. Courbes focales.

Le lieu des foyers s'obtiendra sans difficulté. Il suffit de tirer u de (5) et de porter sa valeur dans (1). L'équation (5) étant du deuxième degré donne pour u deux valeurs, de sorte que le lieu se compose de deux parties distinctes dans le voisinage de la droite D. Considérons l'une de ces parties ; elle peut être une surface, que l'on appellera *surface focale*, ou une courbe, que l'on appellera *courbe focale*, ou bien elle peut se réduire à un point, et la congruence comprend alors toutes les droites passant par ce point. En écartant ce cas, on voit que le lieu des foyers peut se composer de deux surfaces, d'une courbe et d'une surface, ou de deux courbes.

1°. Supposons qu'une portion du lieu des foyers soit une surface (Φ). Prenons cette surface comme support de la congruence ; l'équation (5) a pour racine $u = 0$, on a donc

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial w} & \dfrac{\partial g}{\partial w} & \dfrac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix} = 0.$$

Ceci exprime que la droite D est dans le plan tangent à la surface (Φ) au point M $(u = 0)$, qui est l'un des foyers, soit F. *Ainsi les droites de la congruence sont tangentes à la surface focale au foyer correspondant.* Cherchons le plan focal correspondant à F. Ses coefficients $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont déterminés par les équations

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c &= 0,\\ \mathrm{A}\frac{\partial f}{\partial v} + \mathrm{B}\frac{\partial g}{\partial v} + \mathrm{C}\frac{\partial h}{\partial v} &= 0,\\ \mathrm{A}\frac{\partial f}{\partial w} + \mathrm{B}\frac{\partial g}{\partial w} + \mathrm{C}\frac{\partial h}{\partial w} &= 0,\end{aligned}\right.$$

d'après la condition précédemment écrite, ces équations se réduisent à 2, et expriment que *le plan focal correspondant au foyer* F *est le plan tangent en* F *à la surface* (Φ). *Toutes les surfaces réglées de la congruence sont circonscrites à la surface focale.*

Si le lieu des foyers F, F' *comprend deux surfaces focales* $(\Phi), (\Phi')$*, les droites de la congruence sont tangentes aux deux surfaces focales, les foyers* F, F' *sont les points de contact, les plans focaux sont les plans tangents aux surfaces focales aux foyers correspondants. Le lieu des foyers coïncide avec l'enveloppe des plans focaux.*

Réciproquement, étant données deux surfaces quelconques $(\Phi), (\Phi')$, leurs tangentes communes dépendent de deux paramètres. Soit F un point de (Φ). Considérons le plan tangent en F à (Φ) ; il coupe (Φ') suivant une certaine courbe ; si nous menons de F des tangentes à cette courbe, ces droites, qui sont tangentes aux deux surfaces $(\Phi), (\Phi')$ sont déterminées quand le point F est déterminé ; elles dépendent d'autant de paramètres que le point F, donc de deux paramètres ; elles constituent une congruence, dont les surfaces réglées sont circonscrites aux surfaces $(\Phi), (\Phi')$ qui sont les surfaces focales.

Si les surfaces $(\Phi), (\Phi')$ constituent deux nappes d'une même surface (S), comme cela arrive en général, la congruence sera constituée par les tangentes doubles de la surface (S).

2°. Supposons qu'une portion du lieu des foyers soit une courbe (φ), que nous prendrons pour support de la congruence. Nous pouvons alors supposer que f, g, h ne dépendent que d'un paramètre, v par exemple ; alors $\dfrac{\partial f}{\partial w}, \dfrac{\partial g}{\partial w}, \dfrac{\partial h}{\partial w}$ sont nuls, et $u = 0$ est racine de l'équation (5). *Si les droites d'une congruence rencontrent une courbe fixe, les points de cette courbe sont des foyers pour les droites de la congruence qui y passent.* Cherchons le plan focal correspondant. Nous avons

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c &= 0,\\ \mathrm{A}\frac{\partial f}{\partial v} + \mathrm{B}\frac{\partial g}{\partial v} + \mathrm{C}\frac{\partial h}{\partial v} &= 0,\end{aligned}\right.$$

le plan focal passe par la droite D *et est tangent à la courbe focale. Toutes les surfaces réglées de la congruence passent par la courbe focale, et en un point* M *de cette courbe sont tangentes au plan tangent à cette courbe passant par la droite* D.

Supposons qu'il y ait une surface focale (Φ) et une courbe focale (φ') ; *la congruence est constituée par les droites rencontrant* (φ') *et tangentes à* (Φ). On a immédiatement les foyers et les plans focaux, d'après ce qui précède. *Réciproquement, les droites rencontrant une courbe* (φ') *et tangentes à une surface* (Φ) *constituent une congruence qui admet* (φ') *et* (Φ) *pour lieu de ses foyers.*

Supposons qu'il y ait deux courbes focales $(\varphi), (\varphi')$. *La congruence est constituée par les droites rencontrant* $(\varphi), (\varphi')$, *et ses surfaces réglées contiennent les deux courbes focales. Réciproquement les droites rencontrant deux courbes données constituent une congruence qui admet ces deux courbes comme courbes focales.* Si $(\varphi), (\varphi')$ constituent deux parties d'une même courbe (c), la congruence est constituée par les droites rencontrant (c) en deux points, c'est-à-dire les cordes de (c).

Cas singuliers.

Voyons dans quels cas les deux foyers sont confondus sur toutes les droites de la congruence.

Examinons d'abord le cas de deux surfaces focales confondues. Prenons cette surface (Φ) comme support ; en chaque point F de cette surface est tangente une droite D de la congruence. Si on considère ces points focaux et les droites correspondantes, on peut trouver sur la surface une famille de courbes tangentes en chacun de leurs points à la droite correspondante de la congruence. Soit la droite D, elle est tangente à la surface, donc ses coefficients directeurs sont :

$$a = \lambda\frac{\partial f}{\partial v} + \mu\frac{\partial f}{\partial w}, \qquad b = \lambda\frac{\partial g}{\partial v} + \mu\frac{\partial g}{\partial w}, \qquad c = \lambda\frac{\partial h}{\partial v} + \mu\frac{\partial h}{\partial w}.$$

Soit une courbe de la surface (Φ) définie en exprimant v, w en fonction d'un paramètre ; les coefficients directeurs de la tangente sont

$$dx = \frac{\partial f}{\partial v}\,dv + \frac{\partial f}{\partial w}\,dw, \quad dy = \frac{\partial g}{\partial v}\,dv + \frac{\partial g}{\partial w}\,dw, \quad dz = \frac{\partial h}{\partial v}\,dv + \frac{\partial h}{\partial w}\,dw;$$

pour que cette tangente soit la droite D, il faut que l'on ait

$$\frac{dv}{\lambda} = \frac{dw}{\mu}.$$

Pour déterminer l'un des paramètres v, w en fonction de l'autre, on a à intégrer une équation différentielle du premier ordre. La famille de courbes dépend d'un paramètre, soit $w = \text{const}$. On aura alors

$$a = \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad b = \frac{\partial g}{\partial v}, \qquad c = \frac{\partial h}{\partial v};$$

et (5) devient

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} + u\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} & \dfrac{\partial g}{\partial v} + u\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} & \dfrac{\partial h}{\partial v} + u\dfrac{\partial^2 h}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial w} + u\dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \dfrac{\partial g}{\partial w} + u\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial w} & \dfrac{\partial h}{\partial w} + u\dfrac{\partial^2 h}{\partial v \partial w} \end{vmatrix} = 0.$$

En retranchant la première ligne de la deuxième, u vient en facteur : pour que les points focaux soient confondus, il faut que le déterminant s'annule encore pour $u = 0$, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial w} & \dfrac{\partial g}{\partial w} & \dfrac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix} = 0,$$

ou $\mathrm{E}' = 0$. Alors l'équation des lignes asymptotiques de la surface (Φ), qui est

$$\mathrm{E}'\, dv^2 + 2\mathrm{F}'\, dv\, dw + \mathrm{G}'\, dw^2 = 0,$$

est satisfaite pour $dw = 0$; les courbes $w = \text{const.}$ sont des asymptotiques de la surface (Φ). Ainsi *les congruences à surface focale double peuvent s'obtenir en prenant les tangentes aux lignes asymptotiques d'une surface quelconque.*

Considérons maintenant le cas de deux courbes focales confondues. Prenons cette courbe pour support. Nous pouvons supposer que f, g, h ne dépendent plus de w. Exprimons alors que l'équation (5) admet pour racine double $u = 0$, nous avons

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \\ \dfrac{\partial a}{\partial w} & \dfrac{\partial b}{\partial w} & \dfrac{\partial c}{\partial w} \end{vmatrix} = 0.$$

Les droites D de la congruence passant par un point F de la courbe (φ) engendrent un cône. Le plan tangent à ce cône a pour coefficients les déterminants déduits du tableau

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{\partial a}{\partial w} & \dfrac{\partial b}{\partial w} & \dfrac{\partial c}{\partial w} \end{Vmatrix},$$

et la condition précédente exprime que la tangente FT à la courbe focale est dans le plan tangent au cône ; ceci devant avoir lieu quelle que soit la génératrice du cône que l'on considère, tous les plans tangents au cône passent par FT, et le cône se réduit à un plan. *Une congruence à courbe focale double est engendrée par les droites qui en chaque point* F *d'une courbe sont situées dans un plan passant par la tangente.* Ici l'enveloppe des plans focaux ne coïncide plus avec le lieu des points focaux.

Développables de la congruence.

2. Cherchons si l'on peut associer les droites de la congruence de façon à obtenir des surfaces développables. Reprenons les équations de la droite

$$\begin{aligned} x &= f(v, w) + u\, a(v, w), \\ y &= g(v, w) + u\, b(v, w), \\ z &= h(v, w) + u\, c(v, w); \end{aligned}$$

la condition pour que cette droite engendre une surface développable est

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ da & db & dc \\ df & dg & dh \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{\partial a}{\partial v}dv + \dfrac{\partial a}{\partial w}dw & \dfrac{\partial b}{\partial v}dv + \dfrac{\partial b}{\partial w}dw & \dfrac{\partial c}{\partial v}dv + \dfrac{\partial c}{\partial w}dw \\ \dfrac{\partial f}{\partial v}dv + \dfrac{\partial f}{\partial w}dw & \dfrac{\partial g}{\partial v}dv + \dfrac{\partial g}{\partial w}dw & \dfrac{\partial h}{\partial v}dv + \dfrac{\partial h}{\partial w}dw \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation différentielle qui exprime que la droite de la congruence engendre une surface développable. Elle est de la forme

$$\mathrm{A}\, dv^2 + 2\mathrm{B}\, dv\, dw + \mathrm{C}\, dw^2 = 0;$$

elle donne deux valeurs de $\dfrac{dv}{dw}$, il y a donc deux familles de développables, qu'on appelle *développables de la congruence. Par chaque droite de la congruence passent deux développables de la congruence.* Cherchons les points de contact de cette droite avec les arêtes de rebroussement. Les coordonnées de l'un de ces points vérifient les équations

$$\begin{cases} df + u\, da + a\, d\sigma = 0, \\ dg + u\, db + b\, d\sigma = 0, \\ dh + u\, dc + c\, d\sigma = 0; \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial v} + u\dfrac{\partial a}{\partial v}\right) dv + \left(\dfrac{\partial f}{\partial w} + u\dfrac{\partial a}{\partial w}\right) dw + a\, d\sigma = 0, \\ \left(\dfrac{\partial g}{\partial v} + u\dfrac{\partial b}{\partial v}\right) dv + \left(\dfrac{\partial g}{\partial w} + u\dfrac{\partial b}{\partial w}\right) dw + b\, d\sigma = 0, \\ \left(\dfrac{\partial h}{\partial v} + u\dfrac{\partial c}{\partial v}\right) dv + \left(\dfrac{\partial h}{\partial w} + u\dfrac{\partial c}{\partial w}\right) dw + c\, d\sigma = 0. \end{cases}$$

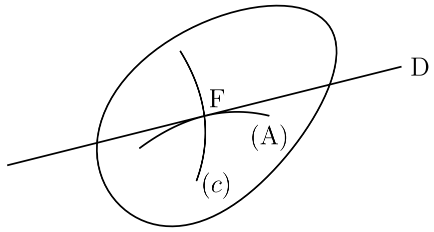
Éliminons entre ces équations $dv, dw, d\sigma$, nous avons pour déterminer l'u du point de contact de la droite avec l'arête de rebroussement, l'équation qui donne les points focaux. Donc *les points où une droite* D *de la congruence touche les arêtes de rebroussement des deux développables de la congruence qui passent par cette droite sont les foyers de la droite* D.

Développables et surface focale.

Supposons que le lieu des points focaux comprenne une surface (Φ) que nous prendrons pour support

$$x = f(v, w), \qquad y = g(v, w), \qquad z = h(v, w).$$

En chaque point F de la surface (Φ) passe une droite D de la congruence tangente en F à (Φ) et admettant F pour foyer. Nous avons trouvé sur la surface (Φ) une famille de courbes tangentes aux droites D. La développable qui a pour arête de rebroussement une de ces courbes (A) est une développable de la congruence.



Nous avons ainsi une des familles de développables. Considérons alors les courbes (c) formant avec (A) un réseau conjugué. Considérons la développable enveloppe des plans tangents à (Φ) tout le long d'une courbe (c) ; la génératrice de cette développable en un point F de (c) est la caractéristique du plan tangent, c'est la tangente conjuguée de la tangente à (c), c'est la droite D. Nous avons la deuxième famille de développables en prenant l'enveloppe des plans tangents à (Φ) en tous les points des courbes (c) conjuguées des courbes (A).

Supposons que les courbes $w = \text{const.}$ soient précisément les courbes (A). On a

$$a = \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad b = \frac{\partial g}{\partial v}, \qquad c = \frac{\partial h}{\partial v};$$

l'équation (1) devient

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,dv + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w}\,dw & \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\,dv + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v\,\partial w}\,dw & \dfrac{\partial^2 h}{\partial v^2}\,dv + \dfrac{\partial^2 h}{\partial v\,\partial w}\,dw \\ \dfrac{\partial f}{\partial v}\,dv + \dfrac{\partial f}{\partial w}\,dw & \dfrac{\partial g}{\partial v}\,dv + \dfrac{\partial g}{\partial w}\,dw & \dfrac{\partial h}{\partial v}\,dv + \dfrac{\partial h}{\partial w}\,dw \end{vmatrix} = 0.$$

Retranchons la première ligne de la troisième : dw vient en facteur, et l'équation prend la forme

$$dw(\mathrm{E}'\,dv + \mathrm{F}'\,dw) = 0;$$

nous trouvons d'abord $dw = 0$, (courbes A) ; la relation

$$\mathrm{E}'\,dv + \mathrm{F}'\,dw = 0$$

définit précisément les courbes (c) conjuguées des courbes $w = \text{const.}$ Nous retrouvons les résultats précédents.

Développables et courbe focale.

Examinons maintenant le cas d'une courbe focale (φ) que nous prendrons pour support :

$$x = f(v), \qquad y = g(v), \qquad z = h(v),$$

alors $\dfrac{\partial f}{\partial w}, \dfrac{\partial g}{\partial w}, \dfrac{\partial h}{\partial w}$ sont nuls, et l'équation (1) devient

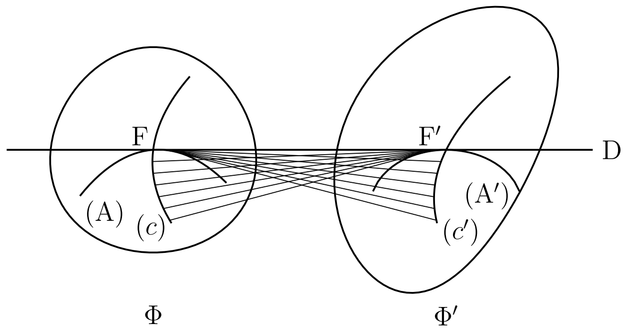
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{\partial a}{\partial v}\,dv + \dfrac{\partial a}{\partial w}\,dw & \dfrac{\partial b}{\partial v}\,dv + \dfrac{\partial b}{\partial w}\,dw & \dfrac{\partial c}{\partial v}\,dv + \dfrac{\partial c}{\partial w}\,dw \\ \dfrac{\partial f}{\partial v}\,dv & \dfrac{\partial g}{\partial v}\,dv & \dfrac{\partial h}{\partial v}\,dv \end{vmatrix} = 0;$$

dv est en facteur. L'une des familles de développables est formée par les droites $v = \text{const.}$, c'est-à-dire par toutes les droites de la congruence passant par un même point F de (φ). Ce sont des cônes.

Examen des diverse cas possibles.

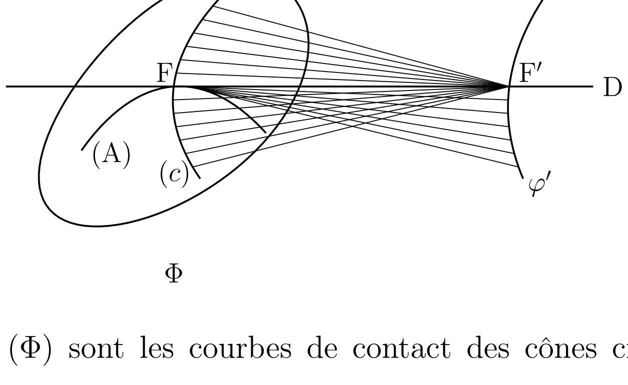
Examinons alors tous les cas possibles relativement à la nature du lieu des foyers.

1°. Supposons qu'il y ait deux surfaces focales $(\Phi), (\Phi')$. Toute droite D de la congruence est tangente à $(\Phi), (\Phi')$ aux deux points F, F' foyers de D. Considérons une des développables ayant pour arête de rebroussement l'une des courbes (A). Toutes ses génératrices sont tangentes à (Φ'), cette développable



est circonscrite à (Φ') le long d'une courbe (c') que nous appellerons *courbe de contact*. Le plan focal correspondant à F est le plan tangent en F à la surface (Φ). Le deuxième plan focal est le plan tangent en F' à (Φ'), et comme la développable est circonscrite à (Φ'), ce plan tangent est le plan tangent à la développable au point F', c'est-à-dire le long de la génératrice D ; c'est le plan osculateur à l'arête de rebroussement (A) au point F. Il y a évidemment réciprocité entre $(\Phi), (\Phi')$. L'autre série de développables aura pour arêtes de rebroussement les enveloppes des droites D sur la surface (Φ'). Soient (A') ces arêtes de rebroussement, et ces développables seront circonscrites à (Φ) le long des courbes de contact (C). Nous avons ainsi déterminé sur $(\Phi), (\Phi')$ deux réseaux conjugués qui se correspondent de manière qu'aux courbes (A) correspondent les courbes (c') et aux courbes (c) les courbes (A'), l'une des familles de courbes correspondantes étant constituée par des arêtes de rebroussement, et l'autre par des courbes de contact. Le deuxième foyer F' est le point de contact de la droite D avec son enveloppe quand on se déplace sur la courbe (c).

2°. Supposons une surface focale (Φ) et une courbe focale (φ'). Une des séries de développables est constituée par des cônes ayant leurs sommets sur (φ'). Les



courbes (c) sur (Φ) sont les courbes de contact des cônes circonscrits à (Φ)

par les divers points de (φ'). Les plans focaux sont le plan osculateur à (A) au point F et le plan tangent à (Φ) au point F, c'est-à-dire le plan tangent à (φ') passant par (D), et le plan tangent au cône de la congruence de sommet F', le long de (D). Les courbes $(c), (\mathrm{A})$ forment un réseau conjugué sur (Φ).

3°. Supposons enfin deux courbes focales $(\varphi), (\varphi')$; les deux familles de développables sont des cônes passant par l'une des courbes et ayant leurs sommets sur l'autre.

Cas singuliers.

Voyons maintenant le cas des foyers confondus.

1°. Il y a une *surface focale double*. Dans ce cas la congruence est constituée par les tangentes à une famille d'asymptotiques de cette surface. Il n'y a plus qu'une famille de développables ayant pour arêtes de rebroussement ces asymptotiques. Prenons cette surface pour support, et pour courbes $w = \text{const.}$ ces asymptotiques. L'équation différentielle qui détermine les développables est

$$dw(\mathrm{E}'\,dv + \mathrm{F}'\,dw) = 0.$$

L'équation des lignes asymptotiques est

$$\mathrm{E}'\,dv^2 + 2\mathrm{F}'\,dv\,dw + \mathrm{G}'\,dw^2 = 0;$$

elle doit être vérifiée pour $dw = 0$; donc $\mathrm{E}' = 0$, et l'équation qui détermine les développables devient $dw^2 = 0$, ce qui démontre le résultat précédemment énoncé.

2°. Il y a une *courbe focale double* (φ). Les droites de la congruence sont dans des plans tangents aux divers points de (φ). Une famille de ces développables est donc constituée par ces plans. On aperçoit immédiatement deux autres développables, l'enveloppe des plans tangents précédents, et la développable qui a pour arête de rebroussement la courbe (φ). Il est facile de voir qu'il n'y en a pas d'autre. Soit la courbe (φ) :

$$x = f(v), \qquad y = g(v), \qquad z = h(v);$$

la tangente a pour coefficients directeurs $\dfrac{\partial f}{\partial v}, \dfrac{\partial g}{\partial v}, \dfrac{\partial h}{\partial v}$; donnons-nous en chaque point les coefficients directeurs d'une droite de la congruence $\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)$. Une droite quelconque de la congruence aura pour coefficients directeurs

$$a = \frac{\partial f}{\partial v} + w\alpha(v), \qquad b = \frac{\partial g}{\partial v} + w\beta(v), \qquad c = \frac{\partial h}{\partial v} + w\gamma(v).$$

L'équation des développables est

$$\begin{vmatrix} f' + w\,\alpha & g' + w\,\beta & h' + w\,\gamma \\ (f'' + w\alpha')\,dv + \alpha\,dw & (g'' + w\beta')\,dv + \beta\,dw & (h'' + w\gamma')\,dv + \gamma\,dw \\ f'\,dv & g'\,dv & h'\,dv \end{vmatrix} = 0;$$

dv est en facteur ; en retranchant la troisième ligne de la première, w est en facteur, et l'équation se réduit à

$$w\,dv^2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ f'' + w\alpha' & g'' + w\beta' & h'' + w\gamma' \\ f' & g' & h' \end{vmatrix} = 0.$$

Nous trouvons $dv = 0$ correspondant aux plans tangents ; $w = 0$ correspondant à la développable d'arête de rebroussement φ, et enfin

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ f'' & g'' & h'' \\ f' & g' & h' \end{vmatrix} + w \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ f' & g' & h' \end{vmatrix} = 0.$$

Le plan tangent considéré en un point de la courbe (φ) a pour équation

$$\begin{vmatrix} x-f & y-g & z-h \\ f' & g' & h' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0;$$

cherchons son enveloppe. La caractéristique est dans le plan

$$\begin{vmatrix} x-f & y-g & z-h \\ f'' & g'' & h'' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-f & y-g & z-h \\ f' & g' & h' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

La droite D est

$$x = f + u\left[\frac{\partial f}{\partial v} + w\alpha(v)\right], \quad y = g + u\left[\frac{\partial g}{\partial v} + w\beta(v)\right], \quad z = h + u\left[\frac{\partial h}{\partial v} + w\gamma(v)\right].$$

Exprimons que cette droite est dans le deuxième plan qui contient la caractéristique, nous avons

$$\begin{vmatrix} f' + w\alpha & g' + w\beta & h' + w\gamma \\ f'' & g'' & h'' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f' + w\alpha & g' + w\beta & h' + w\gamma \\ f' & g' & h' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

condition qui se réduit à

$$\begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ f'' & g'' & h'' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + w \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ f' & g' & h' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

C'est précisément l'équation qui définit la troisième développable, qui est donc l'enveloppe des plans qui contiennent les droites de la congruence.

Sur le point de vue corrélatif.

3. Nous avons trouvé comme cas particulier du lieu des foyers une courbe. En examinant la question au point de vue corrélatif, nous sommes conduits à examiner *le cas où l'enveloppe des plans focaux est une surface développable*, soit Φ. Soit Φ' l'autre nappe le la surface focale. Les droites de la congruence sont tangentes à Φ, Φ' ; or, une tangente à la développable Φ doit être dans l'un des plans tangents qui enveloppent cette développable ; les droites de la congruence sont donc les tangentes à Φ' qui sont dans les plans tangents à Φ, ce sont les tangentes aux sections de Φ' par les plans qui enveloppent Φ. Dans ce cas les arêtes de rebroussement (A') sur la surface Φ' sont des courbes planes, les développables correspondantes étant les plans de ces courbes. Les foyers d'une droite D sont le point de contact avec Φ', et le point d'intersection avec la caractéristique du plan tangent à la développable Φ. L'autre famille de développables aura ses arêtes de rebroussement sur la surface Φ, et correspondant aux courbes (c') conjuguées des courbes (A').

Réciproquement, si les arêtes de rebroussement des développables situées sur une des nappes de la surface focale sont des courbes planes, les développables correspondantes seront des plans, et leur enveloppe sera la deuxième nappe de la surface focale.

Pour avoir une congruence de cette espèce on peut prendre arbitrairement la développable Φ, et sur cette développable, une famille de courbes quelconque. Les tangentes à ces courbes engendrent une congruence de l'espèce considérée, car l'une des familles de développables est évidemment constituée par les plans tangents à la développable Φ ; les courbes de contact sur la développable sont les génératrices, qui peuvent être considérées comme conjuguées à toute famille de courbes.

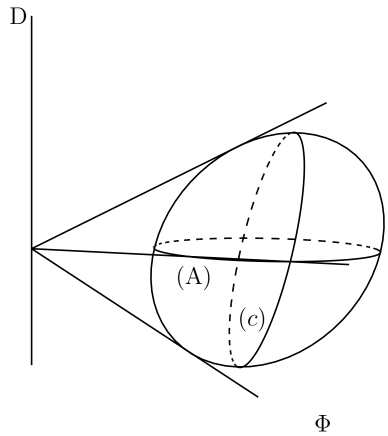
Supposons les deux nappes de la surface focale développables. Il suffit de partir d'une développable Φ, de la couper par une famille de plans quelconques. Les sections seront les courbes A, et les plans de ces sections envelopperont l'autre développable focale. On peut dire dans ce cas que l'on a deux familles de plans à un paramètre, les droites de la congruence étant les intersections de chaque plan d'une famille avec chaque plan de l'autre.

Les *deux cas singuliers* se correspondent à eux-mêmes au point de vue corrélatif. Les asymptotiques d'une surface se correspondent à elles-mêmes ; car une asymptotique est telle que le plan osculateur en l'un de ses points est tangent à la surface, et au point de vue corrélatif, un point d'une courbe se transforme en plan osculateur et inversement.

Congruences de Koenigs.

Il y a un *autre cas particulier corrélatif de lui-même*, c'est le *cas de Koenigs*. On appelle *élément de contact* le système constitué par un point M et un plan passant par ce point. Les surfaces et les courbes sont alors engendrées de la même façon au moyen des éléments de contact : en chaque point d'une surface, il y a un plan tangent et un seul, ce qui donne ∞^2 éléments de contact ; sur une courbe, il y a ∞^1 points, et en chaque point ∞^1 plans tangents, ce qui donne encore ∞^2 éléments de contact ; pour les développables, nous avons ∞^1 plans et

∞^2 points, donnant ∞^2 éléments de contact. Une droite est de même constituée par ∞^2 éléments de contact, ∞^1 points sur la droite et ∞^1 plans passant par la droite. Dans la théorie des congruences, *un foyer et le plan focal correspondant constituent un élément de contact*, et les surfaces focales, courbes focales, développables focales, ou comme l'on dit plus généralement, les *multiplicités focales, sont engendrées par les éléments de contact focaux.* Nous voyons alors que nous avons considéré tous les cas possibles, sauf celui où l'une des multiplicités focales est une droite.



La droite peut être considérée comme le lieu de ∞^1 points ou comme l'enveloppe de ∞^1 plans ; c'est donc à la fois une courbe et une développable ; il en résulte qu'une des familles de développables de la congruence est constituée par des cônes ayant leurs sommets sur la droite, et l'autre par des plans passant par la droite. Si en particulier la congruence a pour multiplicités focales une droite D et une surface Φ, les séries de développables seront d'une part les cônes circonscrits à Φ par les différents points de D, ce qui donne les courbes de contact (c) ; et les plans passant par D, qui coupent suivant les arêtes de rebroussement (A), et (A), (c) forment un système de courbes conjuguées. On obtient ainsi le *Théorème de Koenigs : Les courbes de contact des cônes circonscrits à une surface par les divers points d'une droite* D, *et les sections de cette surface par les plans passant par* D *constituent un réseau conjugué.*

Congruences linéaires.

Si les multiplicités focales sont deux droites, la congruence est constituée par les droites rencontrant ces deux droites. C'est une *congruence linéaire.*

Il peut encore arriver qu'il y ait une droite focale double ; il suffira alors d'associer à chaque point A de la droite un plan P passant par cette droite, et la congruence sera constituée par les droites D situées dans les plans P et passant par les points A.

Application. Surfaces de Joachimsthal.

Rechercher les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont dans des plans passant par une droite fixe Δ.

Soit S une surface répondant à la question ; considérons les tangentes aux lignes de courbure ; ces tangentes D constituent une congruence, et comme les lignes de courbure sont dans des plans passant par Δ, ces droites D rencontrent la droite Δ ; S est une des nappes de la surface focale ; les développables comprennent, d'une part les plans des lignes de courbure, et d'autre part les cônes circonscrits à S par les différents points de Δ, dont les courbes de contact constituent un système conjugué du premier système de lignes de courbure, et par suite forment le deuxième système de lignes de courbure. Si nous considérons ce deuxième système de lignes de courbure, le cône circonscrit coupe la surface S suivant un angle constamment nul ; la courbe de contact, qui est une ligne de courbure de S, est donc aussi une ligne de courbure du cône circonscrit, d'après le Théorème de Joachimsthal ; c'est donc une trajectoire orthogonale des génératrices, donc l'intersection du cône avec une sphère ayant son centre au sommet ; le deuxième système de lignes de courbure est donc constitué par des courbes sphériques, et les sphères correspondantes coupent orthogonalement la surface S le long des lignes de courbure. *La surface* S *est donc trajectoire orthogonale d'une famille de sphères ayant leurs centres sur* Δ. Cette propriété est caractéristique de la surface S ; supposons en effet une famille de sphères ayant leurs centres sur Δ, et une surface S orthogonale à chacune de ces sphères tout le long de la courbe d'intersection ; l'intersection est une ligne de courbure de la sphère, et comme l'angle d'intersection de S et de la sphère est constamment droit, c'est une ligne de courbure de S. Si on joint le centre A de la sphère à un point M de la ligne de courbure, cette droite est normale à la sphère, donc tangente à la surface S, de sorte que la ligne de courbure est la courbe de contact du cône circonscrit à S par le point A.

Nous sommes ainsi conduits à rechercher les surfaces coupant à angle droit une famille de sphères. Considérons les lignes de courbure du premier système ; chacune d'elles est tangente à la droite D correspondante, donc normale à la sphère, et comme elle est dans un plan passant par Δ, elle est trajectoire orthogonale pour le grand cercle section de la sphère par ce plan. Si donc on considère les sections de toutes les sphères de la famille par un même plan passant par Δ, la ligne de courbure située dans ce plan sera trajectoire orthogonale de la famille de cercles obtenue. Si on considère un autre plan, la ligne de courbure dans ce plan sera aussi trajectoire orthogonale de la famille de cercles. En rabattant le deuxième plan sur le premier on aura une autre trajectoire orthogonale de la même famille de cercles. *On considère donc une famille de cercles ayant leurs centres sur* Δ*, on en détermine les trajectoires orthogonales, et on fait tourner chacune de ces trajectoires orthogonales autour de* Δ *d'un angle qui lui corresponde et qui varie d'une manière continue quand on passe d'une trajectoire à la trajectoire infiniment voisine.* Le lieu des courbes ainsi obtenues est une surface qui sera la surface S si la loi de rotation est convenablement choisie. Quelle que soit d'ailleurs cette loi on obtient toujours une surface répondant à la question ; cette surface sera en effet engendrée par des courbes qui couperont orthogonalement la famille de sphères ayant pour grands cercles les cercles considérés, et par conséquent la surface coupera à angle droit toutes ces sphères tout le long des courbes d'intersection.

Nous allons donc chercher les trajectoires orthogonales d'une famille de cercles ayant leurs centres sur une droite Δ. Cherchons plus généralement les trajectoires orthogonales d'une famille de cercles quelconque, que nous définirons en donnant les coordonnées a, b du centre et le rayon R en fonction d'un paramètre u. Considérons une trajectoire orthogonale rencontrant un des cercles en un point M. Les coordonnées du point M sont, en fonction du paramètre u

$$x = a + \mathrm{R}\cos\varphi, \qquad y = b + \mathrm{R}\sin\varphi, \tag{1}$$

φ étant une fonction de u convenablement choisie. Tout revient à déterminer cette fonction de u de façon que la courbe représentée par les équations (1) soit normale à tous les cercles. La normale au cercle a pour paramètres directeurs $x-a$, $y-b$; elle doit être tangente à la courbe, donc

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b}. \tag{2}$$

Or :

$$dx = da + \cos\varphi\, d\mathrm{R} - \mathrm{R}\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = db + \sin\varphi\, d\mathrm{R} + \mathrm{R}\cos\varphi\, d\varphi,$$
$$x-a = \mathrm{R}\cos\varphi, \quad y-b = \mathrm{R}\sin\varphi.$$

L'équation (2) devient

$$\begin{vmatrix} da + \cos\varphi\, d\mathrm{R} - \mathrm{R}\sin\varphi\, d\varphi & db + \sin\varphi\, d\mathrm{R} + \mathrm{R}\cos\varphi\, d\varphi \\ \mathrm{R}\cos\varphi & \mathrm{R}\sin\varphi \end{vmatrix} = 0,$$

ou :

$$\sin\varphi\, da - \cos\varphi\, db - \mathrm{R}\, d\varphi = 0,$$

ou :

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{a'}{\mathrm{R}}\sin\varphi - \frac{b'}{\mathrm{R}}\cos\varphi. \tag{3}$$

Si nous posons

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = w,$$

d'où

$$d\varphi = \frac{2\, dw}{1+w^2},$$

l'équation différentielle devient

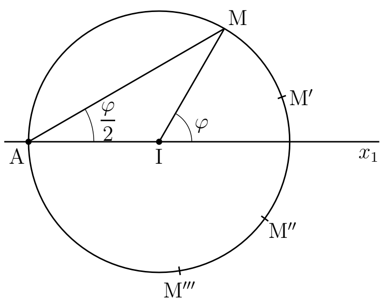
$$\frac{1}{du}\,\frac{2\, dw}{1+w^2} = \mathrm{A}\frac{2w}{1+w^2} + \mathrm{B}\frac{1-w^2}{1+w^2},$$

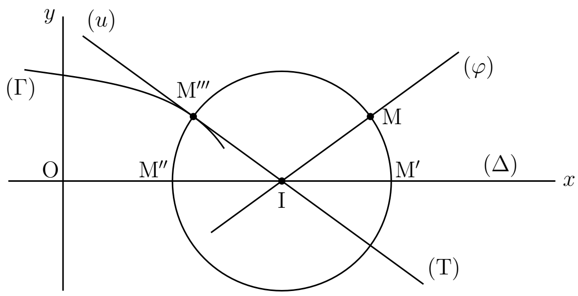
A, B étant fonctions de u ; de sorte que l'équation est de la forme

$$\frac{dw}{du} = \mathrm{A}w + \frac{\mathrm{B}}{2}(1-w^2).$$

C'est une équation de Riccati. Le rapport anharmonique de quatre solutions w est constant. Or, si M est un point d'une trajectoire orthogonale, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ est le coefficient angulaire de la droite AM. Si on considère quatre trajectoires orthogonales $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{M}'', \mathrm{M}'''$, les quatre valeurs de u correspondantes sont les coefficients angulaires des quatre droites $\mathrm{AM}, \mathrm{AM}', \mathrm{AM}'', \mathrm{AM}'''$, et le rapport anharmonique des quatre solutions u est le rapport anharmonique du faisceau $(\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{M}''\mathrm{M}''')$. Ce rapport est indépendant de la position du point A sur le cercle. Il en résulte que *quatre trajectoires orthogonales d'une famille de cercles coupent tous les cercles de la famille suivant le même rapport anharmonique.*

Dans le cas particulier où les cercles ont leurs centres sur une droite Δ, les points $\mathrm{M}', \mathrm{M}''$ d'intersection du cercle avec Δ correspondent à deux trajectoires





orthogonales ; on a donc deux solutions de l'équation de Riccati, et la détermination des trajectoires orthogonales se ramène à une quadrature. Pour définir la famille, au lieu de se donner a, b, R en fonction d'un paramètre, on peut se donner une trajectoire orthogonale Γ, on aura alors trois solutions de l'équation de Riccati, et la solution la plus générale s'obtiendra en écrivant que son rapport anharmonique avec les trois solutions connues est constant.

Supposons que (Δ) soit l'axe Ox, et donnons nous (Γ) par ses tangentes (T). L'une d'elles a pour équations :

$$x = a + \rho \cos u,$$
$$y = \rho \sin u,$$

a étant une fonction de u. Pour déterminer le point de contact avec (Γ), on a, en différentiant :

$$da - \rho \sin u\, du + \cos u\, d\rho = 0, \quad \rho \cos u\, du + \sin u\, d\rho = 0,$$

d'où, pour la valeur de ρ, c'est-à-dire du rayon R du cercle,

$$\mathrm{R} = \rho = \frac{da}{du} \sin u.$$

Une trajectoire orthogonale quelconque est donc représentée par

$$(4) \qquad x = a + \frac{da}{du} \sin u \cos \varphi, \qquad y = \frac{da}{du} \sin u \sin \varphi,$$

φ étant lié à u par la constance du rapport anharmonique $(\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{M}'', \mathrm{M}''')$, ce qui donne simplement

$$(5) \qquad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = m \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Si maintenant on fait tourner la courbe (4) d'un angle v autour de Ox, en supposant m fonction de v, et posant

$$a = f(u), \qquad m = g(v),$$

on obtiendra une trajectoire orthogonale quelconque de la famille de sphères ayant pour grands cercles les cercles considérés :

$$(6) \qquad \begin{cases} x = f(u) + f'(u) \sin u \cos \varphi, \\ y = f'(u) \sin u \sin \varphi \cos v, \ \text{(avec } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = g(v) \operatorname{tg} \frac{u}{2}\text{)} \\ z = f'(u) \sin u \sin \varphi \sin v. \end{cases}$$

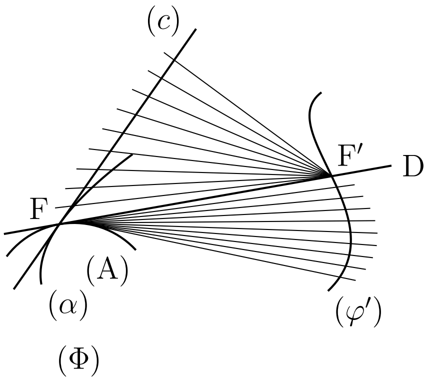
Et en considérant dans ces équations u et v comme des paramètres arbitraires, elles représentent la surface de Joachimsthal la plus générale.

Détermination des développables d'une congruence.

4. Nous avons vu que la détermination des développables d'une congruence dépend de l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre et du deuxième degré. Cette intégration peut se simplifier dans certains cas.

On obtient les développables sans quadrature si la congruence admet deux courbes focales, ou corrélativement deux développables focales. Dans le premier cas, on obtient des cônes, et dans le deuxième, des plans tangents, comme on l'a vu précédemment.

Si on a une courbe focale, ou corrélativement une développable focale, on a immédiatement une des familles de développables de la congruence ; pour avoir l'autre, on a à intégrer une équation différentielle du premier ordre et du premier degré.



Cette équation a des propriétés particulières dans un cas corrélatif de lui-même, *cas où l'on a une courbe focale et une développable focale*. Soit (α) l'arête de rebroussement de la développable focale (Φ) ; considérons une génératrice quelconque C de cette développable ; les droites de la congruence rencontrent la courbe focale (φ') et sont dans les plans tangents à (Φ). Considérons un plan tangent à (Φ) qui rencontre (φ') en F' ; toutes les droites du plan tangent qui passent par F' sont des droites de la congruence. Considérons les développables de la congruence passant par une de ces droites D ; il y a d'abord le plan qui enveloppe la développable, et qui admet pour courbe de contact la génératrice C. Les foyers de la droite D sont F' sur (φ') et F sur C. La deuxième développable a pour arête de rebroussement une courbe (A) de (Φ) dont les tangentes vont rencontrer (φ'). Le problème revient donc à *trouver les courbes d'une développable* (Φ) *dont les tangentes vont rencontrer une courbe* (φ'). Nous allons chercher directement les développables de la congruence, que nous définirons en partant de la courbe (φ') et en associant à chacun de ses points un certain plan dans lequel seront toutes les droites de la congruence passant par ce point ; la développable (Φ) sera l'enveloppe de ce plan. Soit la courbe (φ')

$$x = f(v), \qquad y = g(v), \qquad z = h(v);$$

pour définir un plan passant par un de ses points, il suffit de se donner deux directions $\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)$ et $\alpha_1(v), \beta_1(v), \gamma_1(v)$.

On a ainsi le plan contenant toutes les droites de la congruence ; les coefficients directeurs d'une telle droite sont alors :

$$\bar{a} = \alpha + w\alpha_1, \quad \bar{b} = \beta + w\beta_1, \quad \bar{c} = \gamma + w\gamma_1.$$

L'équation aux développables

$$\begin{vmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ d\bar{a} & d\bar{b} & d\bar{c} \\ df & dg & dh \end{vmatrix} = 0$$

devient ici

$$dv \begin{vmatrix} \alpha + w\alpha_1 & \beta + w\beta_1 & \gamma + w\gamma_1 \\ f'(v) & g'(v) & h'(v) \\ (\alpha' + w\alpha'_1)\, dv + \alpha_1 dw & (\beta' + w\beta'_1)\, dv + \beta_1 dw & (\gamma' + w\gamma'_1)\, dv + \gamma_1 dw \end{vmatrix} = 0.$$

Nous trouvons $dv = 0, v =$ const. ce qui nous donne les plans des droites de la congruence. L'autre solution s'obtiendra par l'intégration de l'équation :

$$dw \begin{vmatrix} \alpha + w\alpha_1 & \beta + w\beta_1 & \gamma + w\gamma_1 \\ f' & g' & h' \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} + dv \begin{vmatrix} \alpha + w\alpha_1 & \beta + w\beta_1 & \gamma + w\gamma_1 \\ f' & g' & h' \\ \alpha' + w\alpha'_1 & \beta' + w\beta'_1 & \gamma' + w\gamma'_1 \end{vmatrix} = 0,$$

équation de la forme

$$\frac{dw}{dv} = \mathrm{P}w^2 + \mathrm{Q}w + \mathrm{R},$$

$\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ étant fonctions de v seulement. C'est une équation de Riccati.

Cherchons dans quels cas on peut avoir des solutions particulières de cette équation. Si la courbe (φ') est plane, si on coupe (Φ) par son plan, la section est une courbe dont les tangentes rencontrent (φ'), c'est une courbe (A) ; on a une solution particulière, le problème s'achève au moyen de deux quadratures. En particulier si (φ') est le cercle imaginaire à l'infini, on a à déterminer sur (Φ) des courbes dont les tangentes rencontrent le cercle imaginaire à l'infini, ce sont les courbes minima. *La détermination des courbes minima d'une développable se ramène à deux quadratures.*

Corrélativement, si (Φ) est un cône, considérons le cône de même sommet et qui a pour base (φ') ; c'est une développable de le deuxième famille ; on a une solution particulière, et le problème s'achève par deux quadratures.

Si (Φ) est un cône et (φ') une courbe plane, on a deux solutions particulières, donc une seule quadrature.

Supposons encore que les plans P précédemment définis soient normaux à la courbe (φ'). Nous avons la *congruence des normales* à la courbe (φ'), et la recherche des développables conduira à celle des *développées* de (φ'). Le plan normal à (φ') en l'un de ses points F' est perpendiculaire à la tangente $\mathrm{F'T}$. Si on considère le cône isotrope J de sommet F', le plan normal est le plan polaire de la tangente par rapport à ce cône isotrope ; parmi les normales il y a donc les deux génératrices de contact des plans tangents menés par la tangente au cône isotrope. Soit G l'une d'elles, on l'obtient algébriquement ; considérons la surface réglée qu'elle engendre lorsque F' décrit la courbe (φ'). Le plan asymptote, plan tangent à l'infini sur G, est le plan tangent au cône isotrope J le long de G ; la surface réglée contient la courbe (φ'), et le plan tangent au point F' est le plan $\mathrm{G\,F'\,T}$, qui est encore le plan tangent au cône isotrope le long de G. Ce plan tangent est donc le même tout le long de la génératrice G, et cette droite engendre une surface développable. Ainsi *les droites isotropes des plans normaux à une courbe gauche décrivent deux développables et enveloppent deux développées de la courbe gauche.* Nous avons ainsi deux solutions particulières, et la détermination des développées doit s'achever par une seule quadrature.

Effectivement, en supposant que w est l'arc s de (φ'), que $\alpha, \beta, \gamma\,;\, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, sont les cosinus directeurs a', b', c' de la normale principale et a'', b'', c'' de la binormale, l'équation générale se réduit, en désignant par a, b, c les cosinus directeurs de la tangente,

$$dw \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + ds \begin{vmatrix} a' + wa'' & b' + wb'' & c' + wc'' \\ a & b & c \\ -\frac{a}{\mathrm{R}} - \frac{a''}{\mathrm{T}} + w\frac{a'}{\mathrm{T}} & -\frac{b}{\mathrm{R}} - \frac{b''}{\mathrm{T}} + w\frac{b'}{\mathrm{T}} & -\frac{c}{\mathrm{R}} - \frac{c''}{\mathrm{T}} + w\frac{c'}{\mathrm{T}} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$-dw + \frac{ds}{\mathrm{T}}(1 + w^2) = 0,$$

ou enfin

$$w = \operatorname{tg} \int \frac{ds}{\mathrm{T}}.$$

On vérifie bien que l'équation différentielle en w admet les deux solutions : $w = \pm i$, qui correspondent aux développables isotropes.

Si on remarque de plus que la surface focale de la congruence des normales est la surface polaire de (φ'), c'est-à-dire que les points de contact des normales avec les développées sont sur la droite polaire, on retrouve tous les résultats essentiels sur la détermination des développées.

EXERCICES.

29. On considère la congruence des tangentes communes aux deux surfaces $x^2 + y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = -2az$. Déterminer les développables de cette congruence : étudier leurs arêtes de rebroussement, leurs courbes de contact, leurs traces sur le plan $z = 0$.

30. Si les deux multiplicités focales d'une congruence sont des développables isotropes (congruence isotrope), toutes les surfaces réglées qui passent par une même droite de la congruence ont même point central et même paramètre de distribution. Le plan perpendiculaire à chaque droite de la congruence mène à égale distance des deux points focaux enveloppe une surface minima. On peut obtenir ainsi la surface minima la plus générale.

31. On suppose que les droites D et D$'$ de deux congruences se correspondent de manière que deux droites correspondantes soient parallèles. Si alors les développables des deux congruences se correspondent, les plans focaux de D sont parallèles à ceux de D$'$; les droites Δ, Δ_1, qui joignent les points focaux correspondants se coupent en un point M ; le lieu de ce point admet Δ et Δ_1, pour tangentes conjuguées, et les courbes conjuguées enveloppées par ces droites correspondent aux développables des deux congruences.

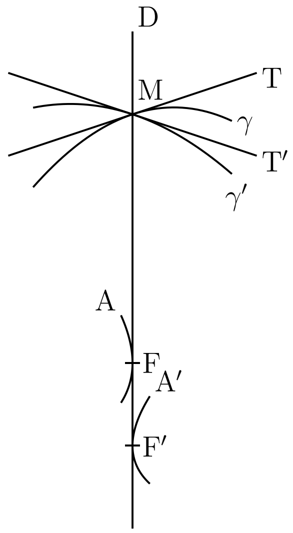
CHAPITRE VII.

CONGRUENCES DE NORMALES.

Propriété caractéristique des congruences de normales.

1. Considérons une surface, les coordonnées d'un de ses points dépendent de deux paramètres ; l'ensemble des normales à cette surface dépend de deux paramètres, et constitue une congruence. Pour obtenir les développables, il suffit de considérer sur la surface les deux séries de lignes de courbure, puisque les normales à une surface en tous les points d'une ligne de courbure engendrent une surface développable. Le plan tangent à une développable passe par la normale D et par la tangente à la ligne de courbure correspondante. C'est l'un des plans focaux de la droite D. Ainsi *les plans focaux sont les plans des sections principales de la surface. Les plans focaux d'une congruence de normales sont rectangulaires.* Il en résulte qu'une congruence quelconque ne peut pas en général être considérée comme formée des normales à une surface. Considérons les deux lignes de courbure $(\gamma), (\gamma')$ passant par un point M de la surface ; à la développable de (γ) correspond une arête de rebroussement (A) dont le plan osculateur est le plan focal, le point de contact F de A et de la droite D est un des points focaux. On peut considérer l'arête de rebroussement (A) comme étant l'enveloppe de la droite D quand le point M se déplace sur la courbe (γ) ; le point F est alors l'un des centres de courbure principaux de la surface au point M. Le plan focal associé est le deuxième plan de section principale FMT′. On aura de même une deuxième arête de rebroussement (A′) en considérant la courbe (γ').

On verra facilement que ces propriétés des centres de courbure principaux et des plans de sections principales subsistent, quelle que soit la nature des multiplicités focales de la congruence considérée.



Réciproque. Prenons une congruence constituée par les droites D

$$x = f(v, w) + u\, a(v, w),$$
$$y = g(v, w) + u\, b(v, w),$$
$$z = h(v, w) + u\, c(v, w).$$

Cherchons à quelles conditions on peut déterminer sur la droite D un point M dont le lieu soit une surface constamment normale à D. Il suffit que l'on puisse déterminer u en fonction de v, w de façon que l'on ait

$$\sum a\, dx = 0,$$

ou

$$\sum a(df + u\, da + a\, du) = 0.$$

On peut supposer que a, b, c soient les cosinus directeurs ; alors $\sum a^2 = 1$, et u représentera la distance du point P où la droite rencontre le support, au point M. On a en même temps $\sum a\,da = 0$ et la condition précédente devient

$$du + \sum a\,df = 0;$$

cette équation peut encore s'écrire

$$-\,du = \sum a\,df. \tag{1}$$

Elle exprime que $\sum a\,df$ est une différentielle totale exacte ; or, on a

$$\sum a\,df = \sum a\frac{\partial f}{\partial v}\,dv + \sum a\frac{\partial f}{\partial w}\,dw;$$

la condition est donc :

$$\frac{\partial}{\partial w}\sum a\,\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\sum a\,\frac{\partial f}{\partial w},$$

ou :

$$\sum \frac{\partial a}{\partial w}\,\frac{\partial f}{\partial v} = \sum \frac{\partial a}{\partial v}\,\frac{\partial f}{\partial w},$$

ou enfin :

$$\sum \left(\frac{\partial a}{\partial w}\,\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial v}\,\frac{\partial f}{\partial w}\right) = 0. \tag{2}$$

Nous trouvons une condition unique. Or, nous avons trouvé précédemment comme condition nécessaire l'orthogonalité des plans focaux. Nous sommes donc conduits à comparer les deux conditions. Les coefficients A, B, C d'un plan focal vérifient les relations

$$\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c = 0, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \mathrm{A}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v} + u\dfrac{\partial a}{\partial v}\right) + \mathrm{B}\left(\dfrac{\partial g}{\partial v} + u\dfrac{\partial b}{\partial v}\right) + \mathrm{C}\left(\dfrac{\partial h}{\partial v} + u\dfrac{\partial c}{\partial v}\right) = 0, \\ \mathrm{A}\left(\dfrac{\partial f}{\partial w} + u\dfrac{\partial a}{\partial w}\right) + \mathrm{B}\left(\dfrac{\partial g}{\partial w} + u\dfrac{\partial b}{\partial w}\right) + \mathrm{C}\left(\dfrac{\partial h}{\partial w} + u\dfrac{\partial c}{\partial w}\right) = 0. \end{cases}$$

Éliminant u entre les deux dernières équations, nous avons

$$\begin{vmatrix} \sum \mathrm{A}\dfrac{\partial f}{\partial v} & \sum \mathrm{A}\dfrac{\partial a}{\partial v} \\ \sum \mathrm{A}\dfrac{\partial f}{\partial w} & \sum \mathrm{A}\dfrac{\partial a}{\partial w} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Les coefficients de direction des normales aux plans focaux sont définis par (3), (4). Si nous considérons A, B, C comme coordonnées courantes, (3) représente un plan passant par l'origine, (4) un cône ayant pour sommet l'origine ; et les génératrices d'intersection sont précisément les normales cherchées. Exprimons que ces deux droites sont rectangulaires ; le plan (3) est perpendiculaire à la droite (a, b, c), qui est sur le cône (4), car on a, puisque $\sum a^2 = 1$ et $\sum a\,da = 0$

$$\sum a\frac{\partial a}{\partial v} = 0, \qquad \sum a\frac{\partial a}{\partial w} = 0;$$

donc les deux normales sont perpendiculaires à la droite (a, b, c) ; si elles sont rectangulaires, c'est que le cône (4) est capable d'un trièdre trirectangle inscrit, ce qui donne la condition

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial a}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial a}{\partial v} \right) = 0;$$

ce qui est précisément la condition (2). De sorte que *la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence soit une congruence de normales, c'est que les plans focaux soient rectangulaires.*

Supposons satisfaite la condition (2). Pour obtenir la surface normale à toutes les droites de la congruence, il suffit de calculer u en fonction de v, w, ce qui se fait par l'équation (1)

$$du = d\Phi(v, w),$$

d'où

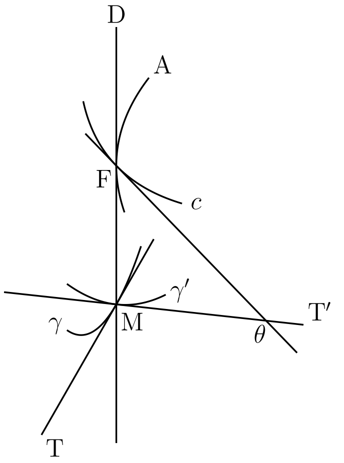
$$u = \Phi(v, w) + \text{const.}$$

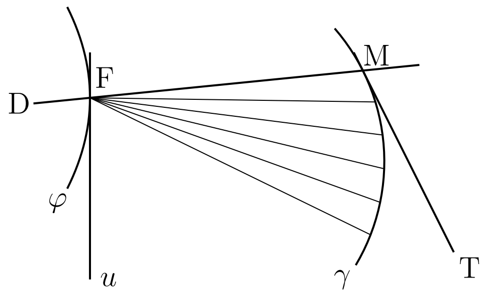
Il y a donc une infinité de surfaces répondant à la question ; si un point M décrit une surface (S) et un point M′ une surface (S′) répondant à la question, on a $u = \text{PM}$, $u' = \text{PM}'$, la distance MM′ sera une quantité constante. Les surfaces (S), (S′) sont appelées *surfaces parallèles* et *une famille de surfaces parallèles admet pour chaque normale mêmes centres de courbure principaux et mêmes multiplicités focales* ; ces multiplicités focales constituent la *développée* de l'une quelconque de ces surfaces.

Relations entre une surface et sa développée.

2. Considérons une nappe de la développée d'une surface (S). Supposons d'abord que ce soit une surface (Φ). Considérons une droite D de la congruence des normales à (S) ; cette droite est tangente en F à l'arête de rebroussement (A) qui appartient à (Φ) ; les plans focaux associés à D sont le plan osculateur à (A) et le plan tangent à (Φ). Pour que la congruence soit une congruence de normales, il faut et il suffit que le plan osculateur à (A) soit normal à (Φ), donc que (A) soit une géodésique de (Φ). *La congruence des normales à la surface* (S) *est constituée par les tangentes à une famille de géodésiques de sa développée* (Φ). *Et réciproquement les tangentes à une famille de* ∞^1 *géodésiques d'une surface quelconque* (Φ) *constituent une congruence de normales.* Soit M le point où la droite D coupe la surface (S) ; lorsque la droite D roule sur l'arête de rebroussement (A), le point M décrit une ligne de courbure (γ) de (S). A chaque point M de (S) correspond un point F de (Φ) ; il y a correspondance point par point entre les deux surfaces ; à la famille de lignes de courbure (γ) de (S) correspond une famille de géodésiques de (Φ). Voyons maintenant les courbes de contact (c) de (Φ) ; considérons la tangente $\text{F}\theta$ à (c), c'est la caractéristique du plan tangent à (Φ) lorsque le point M décrit (γ) ; or, ce plan tangent à (Φ) est le deuxième plan focal, c'est le plan perpendiculaire au plan FMT passant par FM, c'est donc le plan normal à (γ) au point M. Donc $\text{F}\theta$ est la caractéristique du plan normal à (γ), c'est la droite polaire de (γ). *Les courbes de contact de* (Φ) *sont*

les courbes tangentes aux droites polaires des différents points des courbes (γ). $F\theta$ étant dans le plan normal à (γ) rencontre la tangente à la deuxième section principale ; elle passe au centre de courbure géodésique de (γ) sur (S).





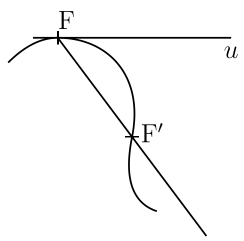
Surface Canal.

Supposons que l'une des nappes de la développée se réduise à une courbe (φ). La droite D rencontre (φ) en l'un des points focaux F. L'une des développables passant par D est un cône de soumet F ; l'une des lignes de courbure (γ) de (S) passant par M est située sur un cône de sommet F. Or, (γ) est constamment normale à D, c'est donc une trajectoire orthogonale des génératrices du cône ; c'est l'intersection de ce cône avec une sphère de centre F. Cette sphère en chaque point M a pour normale la droite D, elle est donc tangente à la surface (S) tout le long de la courbe (γ). A chaque point F de (φ) correspond une sphère ayant ce point pour centre et tangente à (S) tout le long de la ligne de courbure correspondante. *La surface* (S) *est l'enveloppe d'une famille de sphères dépendant d'un paramètre.* Nous l'appellerons une *surface canal.* La réciproque est vraie, comme on le verra plus loin. La courbe (γ) est alors l'intersection d'une sphère avec une sphère infiniment voisine ; c'est un cercle. Le cône F est de révolution, l'axe de ce cône est la position limite de la ligne des centres, c'est la tangente Fu à (φ). Considérons la tangente MT à (γ) : MT tangente en un point du cercle est orthogonale à Fu, Fu est donc dans le deuxième plan de section principale. *Les congruences considérées sont donc formées des génératrices de* ∞^1 *cônes de révolution, dont les axes sont tangents à la courbe lieu des sommets* de ces cônes. Et *réciproquement toute congruence ainsi constituée est une congruence de normales*, car les plans focaux sont les plans tangents et les plans méridiens de ces cônes, et sont par conséquent rectangulaires.

Cyclide de Dupin.

Voyons si les deux nappes de la développée peuvent se réduire à deux courbes (φ), (φ'). Les développables de la congruence sont les cônes ayant leur sommet sur l'une des courbes et passant par l'autre. Tous les cônes F de révolution doivent passer par la courbe (φ'). Cette courbe (φ') est telle qu'il passe par cette courbe une infinité de cônes de révolution. De même (φ) ; $(\varphi), (\varphi')$ ne peuvent donc être que des biquadratiques gauches ou leurs éléments de décomposition. Aucune de ces courbes ne peut être une biquadratique gauche, sans quoi par chacune d'elles il passerait quatre cônes du deuxième degré seulement. Voyons si l'une d'elles peut être une cubique gauche ; les cônes du deuxième degré passant par (φ') ont leurs sommets sur (φ') : les deux courbes $(\varphi), (\varphi')$ seraient confondues. Voyons donc s'il peut exister des cubiques gauches telles que les cônes du deuxième degré qui les contiennent soient de révolution. Un tel cône aurait pour axe la tangente $\mathrm{F}u$; or, il contient cette tangente, donc il se décompose. Donc ni (φ) ni (φ') ne peuvent être des cubiques gauches. Supposons donc que (φ') soit une conique ; le lieu des sommets des cônes de révolution passant par cette conique est une autre conique, qui est dite focale de la première. Il y a réciprocité entre ces coniques, et les cônes de révolution ont pour axes les tangentes aux focales. Donc *les droites rencontrant deux coniques focales l'une de l'autre constituent une congruence de normales*. Les surfaces normales à ces droites s'appellent *Cyclides de Dupin. Leurs deux systèmes de lignes de courbure sont des cercles.*

Supposons en particulier que (φ') soit un cercle ; alors le lieu les sommets des cônes de révolution passant par (φ') est l'axe (φ) de ce cercle, et nous voyons que toutes les droites qui s'appuient sur $(\varphi), (\varphi')$ sont normales à une famille de surfaces. Ces surfaces sont des *tores* de révolution autour de l'axe (φ), le lieu du centre du cercle méridien étant le cercle (φ').



Supposons que (φ') soit une droite, la surface est l'enveloppe d'une famille de sphères ayant leurs centres sur cette droite. C'est une surface de révolution autour de (φ') ; la première nappe de la développée est la droite (φ'), la deuxième est engendrée par la rotation de la développée de la méridienne principale ; pour que ce soit une courbe, il faut que la développée soit un point, donc que la méridienne soit un cercle, et nous retombons sur le cas du tore.

Cas singulier.

Cherchons enfin si les deux nappes de la développée peuvent être confondues. Alors les deux familles de lignes de courbure de la surface (S) sont confondues. C'est le cas des *surfaces réglées à génératrices isotropes*. Les deux nappes se réduisent à une seule courbe, comme on le verra au paragraphe suivant.

Étude des surfaces enveloppes de sphères.

3. Nous avons été amenés dans ce qui précède à considérer les surfaces enveloppes de sphères. Nous allons maintenant étudier les réciproques des propriétés précédentes.

Considérons une surface (S) enveloppe de ∞^1 sphères (Σ). Chaque sphère coupe la sphère infiniment voisine suivant un cercle, et les normales à (S) en tous les points de ce cercle passent par le centre de la sphère. Le lieu des centres des sphères est une courbe rencontrée par les normales à (S), c'est une des nappes de la développée. D'autre part, la sphère (Σ) étant tangente à la surface (S) tout le long du cercle caractéristique, ce cercle est une ligne de courbure de la surface (S), d'après le Théorème de Joachimsthal. *Les surfaces enveloppes de sphères ont une famille de lignes de courbure circulaires. Réciproquement toute surface ayant une famille de lignes de courbure circulaires est une enveloppe de sphères.* Considérons une ligne de courbure circulaire (K) ; toute sphère passant par (K) coupe la surface (S) sous un angle constant, d'après le Théorème de Joachimsthal. Or, il est possible de trouver une sphère passant par (K) et tangente à (S) en l'un des points de ce cercle ; cette sphère sera alors tangente à (S) en tous les points du cercle (K), et toute ligne de courbure circulaire est courbe de contact d'une sphère avec la surface. La surface est l'enveloppe des sphères ainsi déterminées.

Soit une sphère de centre (a, b, c) et de rayon r, a, b, c, r étant fonctions d'un même paramètre. La sphère a pour équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0;$$

la caractéristique est en outre définie par l'équation

$$(x-a)\,da + (y-b)\,db + (z-c)\,dc + r\,dr = 0;$$

On vérifie bien que c'est un cercle dont le plan est perpendiculaire à la direction da, db, dc, de la tangente au lieu des centres des sphères.

Nous venons de considérer les surfaces dont une famille de lignes de courbure est constituée par des cercles. Voyons si les deux familles de lignes de courbure peuvent être circulaires. La surface correspondante pourra être considérée de deux façons différentes comme l'enveloppe de ∞^1 sphères. Les deux nappes de la développée sont des courbes. Nous obtenons la Cyclide de Dupin, que nous allons étudier à un point de vue nouveau.

Correspondance entre les droites et les sphères.

Les droites et les sphères sont des éléments géométriques dépendant de quatre paramètres. Ce fait seul permet de prévoir qu'il y aura une espèce de correspondance entre l'étude des systèmes de droites et celle des systèmes de sphères. Cette correspondance trouve son expression analytique dans une transformation, due à Sophus Lie, et que nous exposerons plus tard. Mais nous la verrons se manifester auparavant dans diverses questions. C'est ainsi que l'on peut considérer dans la géométrie des sphères les enveloppes de ∞^1 sphères comme correspondant aux surfaces réglées, lieux de ∞^1 droites ; la cyclide de Dupin correspond alors aux surfaces doublement réglées, donc aux surfaces réglées du deuxième degré. Nous allons voir l'analogie se développer dans l'étude qui suit.

Soit (Σ) une sphère de la première famille, (Σ') une sphère de la deuxième famille, (Σ) touche (S) suivant un cercle (K), Σ' touche (S) suivant un cercle (K′). La surface (S) étant engendrée par le cercle (c) ou par le cercle (c'), il en résulte que ces deux cercles ont au moins un point commun M ; soient O, O′ les centres des sphères $(\Sigma), (\Sigma')$, OM et O′M sont normales aux sphères $(\Sigma), (\Sigma')$

et par suite normales en M à la surface. Donc elles coïncident, O, M, O' sont sur une même droite ; les sphères $(\Sigma), (\Sigma')$ sont tangentes en M. *Une sphère de l'une des familles est tangente à une sphère quelconque de l'autre famille.* (Deux génératrices de systèmes différents d'une quadrique se rencontrent).

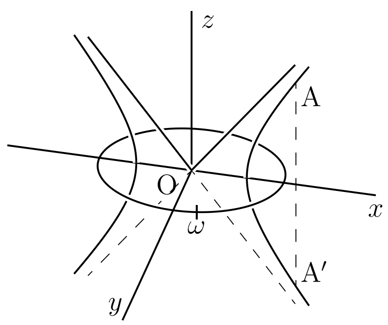
Considérons trois sphères fixes $(\Sigma), (\Sigma_1), (\Sigma_2)$ d'une des familles. Elles sont tangentes à toutes les sphères de l'autre famille, et par suite *la surface est l'enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes.* (Une quadrique est le lieu d'une droite rencontrant trois droites fixes). Les trois sphères $(\Sigma), (\Sigma_1), (\Sigma_2)$ se coupent en deux points qui peuvent être considérés comme des sphères de rayon nul tangentes à $(\Sigma), (\Sigma_1), (\Sigma_2)$; donc il y a deux sphères de rayon nul dans chaque famille de sphères enveloppées par la cyclide. Les sphères de l'autre famille devant être tangentes à ces deux sphères de rayon nul passent par leurs centres. Ces deux points sont sur le lieu des centres des sphères, donc sur les coniques focales ; *si donc nous considérons les deux coniques focales, les sphères d'une des familles ont leurs centres sur l'une des coniques et passent par deux points fixes de l'autre, symétriques par rapport au plan de la première.* Il est alors facile, avec cette génération, de trouver l'équation de la cyclide.

Équation de la cyclide de Dupin.

1°. Supposons d'abord que l'une des coniques soit une ellipse, par exemple : l'autre est une hyperbole. Prenons pour axes Ox, Oy les axes de l'ellipse, dont l'équation dans son plan est :

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

L'hyperbole focale est dans le plan $y = 0$. Elle a pour équations



$$\text{(H)} \qquad y = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Un point ω de l'ellipse (E) a pour coordonnées

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi, \qquad z = 0.$$

Soit sur l'hyperbole (H) le point fixe A de coordonnées

$$x_0, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0^2 = b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2 - b^2} - 1\right).$$

L'équation d'une sphère Σ ayant pour centre ω et passant par le point A sera

$$(x - a\cos\varphi)^2 + (y - b\sin\varphi)^2 + z^2 = (x_0 - a\cos\varphi)^2 + b^2\sin^2\varphi + b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2 - b^2} - 1\right),$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax\cos\varphi - 2by\sin\varphi = x_0^2 + b^2\frac{x_0^2}{a^2 - b^2} - b^2 - 2ax_0\cos\varphi,$$

ou

$$2a(x - x_0)\cos\varphi + 2by\sin\varphi = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - \frac{a^2x_0^2}{c^2},$$

en posant comme d'habitude

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

L'équation de la sphère est de la forme

$$\mathrm{A}\cos\varphi + \mathrm{B}\sin\varphi = \mathrm{C},$$

la condition pour qu'il y ait une racine double, c'est-à-dire, l'équation de l'enveloppe, est

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = \mathrm{C}^2.$$

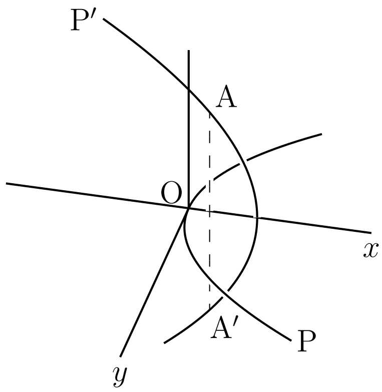
Donc la cyclide a pour équation :

$$4a^2(x - x_0)^2 + 4b^2y^2 = \left(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - \frac{a^2x_0^2}{c^2}\right)^2.$$

2°. Supposons maintenant qu'une des coniques soit une parabole. L'autre est aussi une parabole. Prenons les axes ordinaires, nous avons pour équations des deux coniques

(P) $\qquad z = 0, \qquad y^2 = 2px,$

(P′) $\qquad y = 0, \qquad x^2 + z^2 = (x - p)^2.$



Le centre C de la sphère sur la parabole P a pour coordonnées

$$x = 2p\lambda^2, \qquad y = 2p\lambda, \qquad z = 0.$$

Le point fixe A sur la parabole P′ a pour coordonnées

$$x_0, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0^2 = (x_0 - p)^2 - x_0^2.$$

L'équation de la sphère est

$$(x - 2p\lambda^2)^2 + (y - 2p\lambda)^2 + z^2 = (x_0 - 2p\lambda^2)^2 + 4p^2\lambda^2 + (x_0 - p)^2 - x_0^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x_0 - p)^2 - 4p\lambda y - 4p(x - x_0)\lambda^2 = 0,$$

et l'équation de l'enveloppe, c'est-à-dire de la cyclide, est

$$\left[x^2 + y^2 + z^2 - (x_0 - p)^2\right](x - x_0) + py^2 = 0.$$

L'ordre de la surface, qui est on général 4, s'abaisse ici à 3.

Surface canal isotrope.

Parmi les surfaces réglées, nous avons considéré les surfaces développables, où chaque génératrice rencontre la génératrice infiniment voisine. Le cas correspondant pour les enveloppes de sphères sera celui où chaque sphère est tangente à la sphère infiniment voisine. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le plan radical des deux sphères leur soit tangent. Prenons la sphère

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0. \tag{1}$$

Le plan radical de cette sphère et de la sphère infiniment voisine est

$$(x-a)\,da+(y-b)\,db+(z-c)\,dc+r\,dr=0; \tag{2}$$

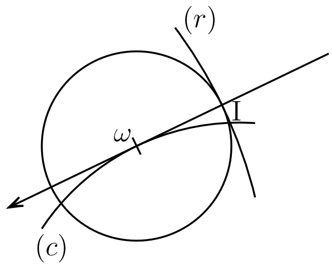
pour qu'il soit tangent à la sphère (1) il faut et il suffit que sa distance au centre (a, b, c) soit égale à $\pm r$, donc que l'on ait

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{da^2+db^2+dc^2}}=\pm r,$$

ou

$$da^2+db^2+dc^2=dr^2. \tag{3}$$

Donc r n'est autre que l'arc S de la courbe (c) lieu des centres des sphères, cet arc étant compté à partir d'une origine arbitraire. Cherchons le point de contact de la sphère avec la sphère infiniment voisine. Les coordonnées satisfont aux équations



$$\frac{x-a}{da}=\frac{y-b}{db}=\frac{z-c}{dc}=\frac{-r\,dr}{dr^2}=-\frac{r}{dr}=-\frac{s}{ds};$$

d'où

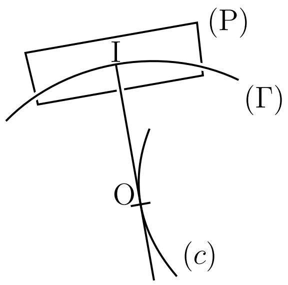
$$x=a-s\frac{da}{ds}=a-s\alpha,\quad y=b-s\beta,\quad z=c-s\gamma,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la tangente. On obtient ainsi le point I, qui décrit une développante (r) de la courbe (c). L'intersection d'une sphère avec la sphère infiniment voisine n'est autre que l'intersection de cette sphère avec un de ses plans tangents : c'est un couple de droites isotropes se coupant au point I. *L'enveloppe se compose de deux surfaces réglées à génératrices isotropes. Nous l'appellerons une surface canal isotrope. Réciproquement une surface réglée à génératrices isotropes est une nappe d'une enveloppe de sphères.* Considérons en effet une génératrice D et le cercle de l'infini. Par la génératrice isotrope D passent une infinité de sphères ; ces sphères contiennent la droite D et le cercle imaginaire à l'infini, ce qui donné sept conditions ; elles dépendent de deux paramètres arbitraires. Nous pouvons faire en sorte que la sphère soit tangente à la surface considérée (S) en deux points à distance finie de la droite D ; la sphère est alors déterminée ; mais de plus elle est tangente à la surface (S) au point à l'infini sur D, donc elle se raccorde avec (S) tout le long de la génératrice D. La surface (S) fera partie de l'enveloppe de ces sphères.

Sur une telle surface, les deux systèmes de lignes de courbure sont confondus avec les génératrices isotropes, les deux nappes de la développée sont confondues avec la courbe (C). La courbe (r) joue ici un rôle analogue à l'arête de rebroussement des surfaces développables. En effet, pour une développable, il y a un élément de contact (point de l'arête de rebroussement et plan osculateur en ce point) commun à une génératrice et à la génératrice infiniment voisine. Ici, c'est l'élément de contact constitué par le point I et le plan tangent à la sphère en ce point, plan normal à $\mathrm{I}\omega$, qui est commun à la sphère (Σ) et à la sphère infiniment voisine. Le point I est un ombilic de la surface (S). La ligne (r) en est une ligne double, c'est un lieu d'ombilics. Nous l'appellerons la *ligne ombilicale* de la surface canal isotrope.

Lignes de courbure et lignes asymptotiques.

4. Considérons une surface (S_0) et une ligne asymptotique. Les tangentes en chacun des points de cette ligne engendrent une développable, et l'élément de contact commun à une génératrice et à la génératrice infiniment voisine, comprenant un point de la ligne et le plan osculateur, qui est tangent à (S_0), est un élément de contact de (S_0). Considérons maintenant une ligne de courbure (Γ) : la normale en chaque point engendre une développable. Soit (c) l'arête de rebroussement ; OI est égal à l'arc de (c) ; si donc nous considérons les sphères de centres O et de rayons OI, chacune de ces sphères touche la sphère infiniment voisine, et l'élément de contact (I, P) commun à ces deux sphères est un élément de contact de la surface (S_0).



Appelons *sphère de courbure* de (S_0) toute sphère ayant pour centre un centre de courbure principale et pour rayon le rayon de courbure principal correspondant. Et nous pourrons dire :

Les sphères de courbure de (S_0) *qui correspondent à une même ligne de courbure* (Γ)*, enveloppent une surface canal isotrope, ayant* (Γ) *pour ligne ombilicale.*

Réciproquement, si une surface canal isotrope (S) est circonscrite à la surface (S_0) le long de sa ligne ombilicale, celle-ci étant ligne de courbure pour (S) sera ligne de courbure pour (S_0), d'après le théorème de Joachimsthal.

Les choses s'énoncent d'une manière plus nette en substituant à la notion de courbe la notion de *bande*. Une bande sera, par définition, formée de ∞^1 éléments de contact appartenant à une même multiplicité : le lieu des points (de ces éléments de contact) sera une courbe, et les plans (de ces éléments de contact) seront tangents à la courbe aux points correspondants. Une bande appartenant à une surface sera formée des points d'une courbe tracée sur la surface, associés aux plans tangents à la surface en ces points. On appellera *bande de rebroussement* d'une surface développable le lieu des éléments de contact communs à chaque génératrice et à la génératrice infiniment voisine. Et on appellera *bande ombilicale* d'une surface canal isotrope le lieu des éléments de contact communs à chacune des sphères inscrites à la surface et à la sphère infiniment voisine.

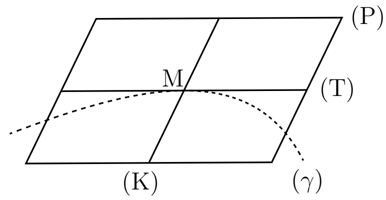
Appelant de même *bandes asymptotiques*, *bandes de courbure* les lieux des éléments de contact d'une surface appartenant aux lignes asymptotiques ou aux lignes de courbure de cette surface, on concluera :

Une bande asymptotique d'une surface est la bande de rebroussement d'une développable ; une bande de courbure d'une surface est la bande ombilicale d'une surface canal isotrope. Et réciproquement : toute bande de rebroussement (d'une développable), qui appartient à une surface (S_0), est bande asymptotique de (S_0) ; toute bande ombilicale (d'une surface canal isotrope), qui appartient à une surface (S_0), est bande de courbure pour (S_0).

On voit ainsi, qu'au point de vue de la correspondance entre droites et sphères, les lignes asymptotiques correspondent aux lignes de courbure.

Bandes asymptotiques et bandes de courbure.

Remarque 1. Sur chaque élément de contact (M, P) d'une bande, il y a *deux éléments linéaires* à considérer. (Un élément linéaire étant formé d'un point et d'une droite passant par ce point). C'est *l'élément linéaire tangent* formé du



point M de l'élément et de la tangente (T) à la courbe qui sert de *support* à la bande, qu'on peut appeler simplement la *courbe de la bande* ; et *l'élément linéaire caractéristique* formé du point M et de la caractéristique (K) du plan (P), c'est-à-dire de la génératrice rectiligne de la développable enveloppée par les plans (P), ou *développable de la bande.* Ces deux éléments linéaires sont corrélatifs, au point de vue de la dualité ; une bande est corrélative d'une bande.

Dans une *bande asymptotique*, (T) et (K) sont confondues dans une *bande de courbure*, (T) et (K) sont rectangulaires ; ces termes ont donc un sens par eux-mêmes, sans supposer une surface (S_0) à laquelle appartienne la bande considérée. Si la bande de rebroussement est donnée, la développable correspondante est la développable de la bande. Si la bande de courbure est donnée, sa courbe (γ) est ligne de courbure de la développable de la bande ; et la surface canal isotrope dont la bande ombilicale se confond avec cette bande de courbure est l'enveloppe des sphères de courbure de la développable, construites aux divers points M. Les mots bande ombilicale, bande de courbure sont donc équivalents ; de même que ceux de bande asymptotique et bande de rebroussement.

Remarquons encore que, si l'on se donne une bande de courbure, la sphère de courbure qui correspond à un élément de contact (M, P) de la bande est définie par la condition d'admettre (M, P) pour un de ses éléments de contact et d'avoir son centre sur la droite polaire de la courbe (γ) lieu des points M (Voir N° 2 et N° 3). Cette seconde condition exprime que la sphère a avec (γ) un contact du second ordre ; de même que dans une bande asymptotique chaque plan (P) est osculateur à (γ). C'est donc une nouvelle analogie entre les bandes de courbure et les bandes asymptotiques.

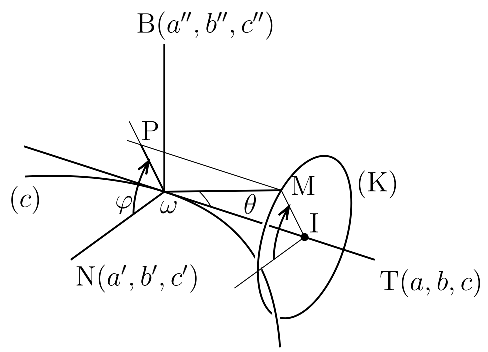
Lignes de courbure des enveloppes de sphères.

5. Nous connaissons déjà une des familles de lignes de courbure, celle constituée par les caractéristiques des sphères. Déterminons la deuxième famille. Soit (c) le lieu des centres des sphères. Exprimons ses coordonnées en fonction de l'arc (S) ; l'une des sphères de centre ω rencontre la sphère infiniment voisine suivant un cercle (K) dont le plan est normal à la tangente ωT. Introduisons le trièdre de Serret au point ω de la courbe (c), et définissons par rapport à ce trièdre les coordonnées d'un point M de la surface, c'est-à-dire du cercle (K). Appelons θ l'angle de ωM avec ωT, cet angle est le même pour tous les points du cercle (K). Projetons M en P sur le plan normal, et soit φ l'angle de ωP avec ωN. Les coordonnées de M par rapport au trièdre de Serret sont, en appelant r le rayon de la sphère,

$$(1) \qquad \xi = r\cos\theta, \qquad \eta = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad \zeta = r\sin\theta\sin\varphi.$$

Par rapport à un système d'axes quelconques, ces coordonnées sont, en appelant x, y, z les coordonnées de ω

$$(2) \quad \mathrm{X} = x + a\xi + a'\eta + a''\zeta, \quad \mathrm{Y} = y + b\xi + b'\eta + b''\zeta, \quad \mathrm{Z} = z + c\xi + c'\eta + c''\zeta;$$



r, θ sont fonctions de S ; les paramètres variables sont s et φ. Écrivons que (K) est le cercle caractéristique, nous avons

$$\begin{cases} \sum(\mathrm{X} - x)^2 - r^2 = 0, \\ \sum a(\mathrm{X} - x) + r\dfrac{dr}{ds} = 0. \end{cases}$$

En supposant que le trièdre de coordonnées coïncide avec le trièdre de Serret, cette équation devient :

$$\xi + r\frac{dr}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$r\cos\theta + r\frac{dr}{ds} = 0,$$

ou

$$(3) \qquad \cos\theta = -\frac{dr}{ds}.$$

θ est ainsi défini en fonction de S.

Une surface enveloppe de sphères est engendrée par des cercles ; c'est une surface cerclée. Inversement, on peut chercher si une surface cerclée est une enveloppe de sphères. Le calcul précédent montre que, pour qu'il en soit ainsi, il faut que les axes des cercles engendrent une surface développable, et on outre, que l'on ait la condition (3).

Cherchons les lignes de courbure. Ce sont les trajectoires orthogonales des cercles (K) définis par S = const. La tangente à une ligne quelconque passant par M a pour coefficients directeurs

$$\begin{aligned}
d\mathrm{X} &= a\,ds + \xi\frac{a'}{\mathrm{R}}\,ds + \eta\left(-\frac{a}{\mathrm{R}} - \frac{a''}{\mathrm{T}} - \dots\right)ds + \zeta\frac{a'}{\mathrm{T}}\,ds + a\,d\xi + a'\,d\eta + a''\,d\zeta,\\
d\mathrm{Y} &= b\,ds + \xi\frac{b'}{\mathrm{R}}\,ds + \eta\left(-\frac{b}{\mathrm{R}} - \frac{b''}{\mathrm{T}} - \dots\right)ds + \zeta\frac{b'}{\mathrm{T}}\,ds + b\,d\xi + b'\,d\eta + b''\,d\zeta,\\
d\mathrm{Z} &= c\,ds + \xi\frac{c'}{\mathrm{R}}\,ds + \eta\left(-\frac{c}{\mathrm{R}} - \frac{c''}{\mathrm{T}} - \dots\right)ds + \zeta\frac{c'}{\mathrm{T}}\,ds + c\,d\xi + c'\,d\eta + c''\,d\zeta.
\end{aligned}$$

En prenant de nouveau le trièdre de Serret pour trièdre de coordonnées, ces coefficients directeurs deviennent :

$$\left(1 - \frac{\eta}{\mathrm{R}}\right)ds + d\xi, \qquad \left(\frac{\xi}{\mathrm{R}} + \frac{\zeta}{\mathrm{T}}\right)ds + d\eta, \qquad -\frac{\eta}{\mathrm{T}}ds + d\zeta.$$

Pour la tangente au cercle (K), on a $ds = 0$, et les coefficients directeurs sont :

$$\partial\xi = 0, \qquad \partial\eta = -r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi, \qquad \partial\zeta = r\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi.$$

La condition qui définit les trajectoires orthogonales des cercles (K) est donc

$$-\left[\left(\frac{\xi}{\mathrm{R}} + \frac{\zeta}{\mathrm{T}}\right)ds + d\eta\right]\sin\varphi + \left[-\frac{\eta}{\mathrm{T}}\,ds + d\zeta\right]\cos\varphi = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des lignes de courbure. On peut l'écrire

$$\begin{aligned}
&-\frac{r\cos\theta}{\mathrm{T}}\,ds\,\sin\varphi - \frac{ds}{\mathrm{T}}\,(\zeta\sin\varphi + \eta\cos\varphi) - d\eta\sin\varphi + d\zeta\cos\varphi = 0,\\
&-\frac{r\cos\theta}{\mathrm{R}}\,ds\,\sin\varphi - \frac{r\sin\theta}{\mathrm{T}}\,ds - \sin\varphi\big[d(r\sin\theta)\,\cos\varphi - r\sin\theta\,\sin\varphi\,d\varphi\big]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \cos\varphi\big[d(r\sin\theta)\,\sin\varphi + r\sin\theta\,\cos\varphi\,d\varphi\big] = 0,\\
&-\frac{r\cos\theta}{\mathrm{R}}\,ds\,\sin\varphi - \frac{r\sin\theta}{\mathrm{T}}\,ds + r\sin\theta\,d\varphi = 0,
\end{aligned}$$

ou

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\mathrm{T}} + \frac{\operatorname{cotg}\theta\,\sin\varphi}{\mathrm{R}};$$

équation de la forme

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathrm{A}\sin\varphi + \beta.$$

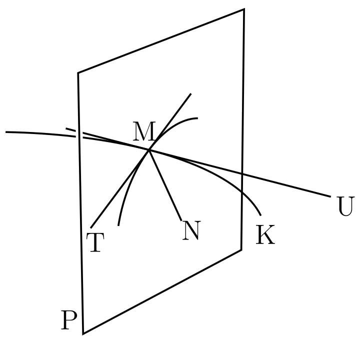
Si on prend comme fonction inconnue $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, on est ramené à une équation de Riccati. Mais l'angle φ est l'angle du rayon IM avec un rayon fixe. Donc *quatre lignes de courbure du deuxième système coupent les cercles caractéristiques en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.* Nouvelle analogie avec les lignes asymptotiques d'une surface réglée.

On a les simplifications connues si on a *à priori* une solution de l'équation. Ainsi si on considère l'enveloppe de sphères (Σ) ayant leurs centres dans un plan, tous les cercles caractéristiques sont orthogonaux à la section de la surface par ce plan, qui est alors une ligne de courbure. La détermination des lignes de courbure se ramène dans ce cas à deux quadratures.

Remarque. Plus généralement, la détermination des trajectoires orthogonales d'une famille de ∞^1 cercles dépend de l'intégration d'une équation de Riccati. D'où des conclusions analogues aux précédentes.

Cas où une des nappes de la développée est une développable.

6. Nous venons de considérer le cas où une des nappes de la développée d'une surface est une courbe. Corrélativement, considérons maintenant le cas où une des nappes de la développée est une surface développable. Alors les plans tangents à cette développable constituent une des familles de développables de la congruence ; un tel plan P coupe la surface suivant une courbe normale à toutes les droites de la congruence situées dans ce plan et qui sera une ligne de courbure. En tout point de cette ligne, la normale à la surface est dans le plan P. Donc le plan P coupe orthogonalement la surface (S) tout le long de la ligne de courbure.



Réciproquement, si une surface coupe orthogonalement une famille de plans, ses sections par ces plans sont des lignes de courbure, d'après le Théorème de Joachimsthal, et ces plans, constituant une des familles de développables de la congruence des normales, enveloppent une développable, qui est une des nappes de la développée de la surface.

Considérons la deuxième ligne de courbure passant par un point M ; sa tangente MU est perpendiculaire à la tangente MT à la première ligne de courbure et à la normale MN à la surface ; ces deux droites étant dans le plan P, MU est perpendiculaire au plan P. *Les lignes de courbure de la deuxième famille sont trajectoires orthogonales des plans* P.

Considérons une de ces trajectoires orthogonales (K) ; les plans P sont normaux à la courbe (K) : l'une des nappes de la développée, celle qui est une développable, est ainsi l'enveloppe des plans normaux, ou la surface polaire de la courbe (K). *Toutes les lignes de courbure* (K) *non planes ont donc même surface polaire, qui est l'enveloppe des plans des lignes de courbure planes. L'arête de rebroussement de cette surface est le lieu des centres des sphères osculatrices à la courbe* (K). La ligne (K) étant une ligne de courbure, les normales à la surface en tous les points de (K) forment une développable, et par suite enveloppent une développée de la courbe (K), qui est une géodésique de sa surface polaire. Si donc on part des plans P, pour avoir les courbes (K) on est ramené à la recherche des géodésiques d'une surface développable, ce qui se réduit à des quadratures ; et comme la surface cherchée peut être considérée comme engendrée par les courbes (K) on voit qu'on obtiendra cette surface par des quadratures.

Partons des plans P, et cherchons leurs trajectoires orthogonales. Considérons l'arête de rebroussement (A) de l'enveloppe des plans P, et introduisons le trièdre de Serret en chaque point ω de cette courbe, soit $(\omega.\xi\,\eta\,\zeta)$. Le plan P est le plan osculateur $\xi\omega\eta$, et nous voulons chercher dans ce plan un point $\mathrm{M}(\xi, \eta)$ dont le lieu soit normal à P. Les coordonnées de M sont

$$\mathrm{X} = x + a\xi + a'\eta, \qquad \mathrm{Y} = y + b\xi + b'\eta, \qquad \mathrm{Z} = z + c\xi + c'\eta,$$

la direction de la tangente au lieu du point M est définie par

$$\begin{aligned} d\mathrm{X} &= a\,ds + \xi\frac{a'}{\mathrm{R}}\,ds - \eta\left(\frac{a}{\mathrm{R}} + \frac{a''}{\mathrm{T}}\right)ds + a\,d\xi + a'\,d\eta,\\ d\mathrm{Y} &= b\,ds + \xi\frac{b'}{\mathrm{R}}\,ds - \eta\left(\frac{b}{\mathrm{R}} + \frac{b''}{\mathrm{T}}\right)ds + b\,d\xi + b'\,d\eta,\\ d\mathrm{Z} &= c\,ds + \xi\frac{c'}{\mathrm{R}}\,ds - \eta\left(\frac{c}{\mathrm{R}} + \frac{c''}{\mathrm{T}}\right)ds + c\,d\xi + c'\,d\eta,\end{aligned}$$

expressions de la forme

$$d\mathrm{X} = \mathrm{A}a + \mathrm{B}a' + \mathrm{C}a'', \quad d\mathrm{Y} = \mathrm{A}b + \mathrm{B}b' + \mathrm{C}b'', \quad d\mathrm{Z} = \mathrm{A}c + \mathrm{B}c' + \mathrm{C}c''.$$

Écrivons que cette direction est normale au plan $\xi\omega\eta$, c'est-à-dire parallèle à la binormale (a'', b'', c''). Nous avons $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$, ou

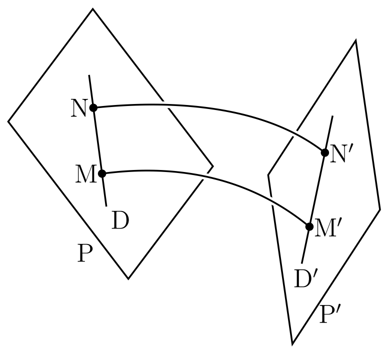
$$ds - \frac{\eta}{\mathrm{R}}\,ds + d\xi = 0, \qquad \frac{\xi}{\mathrm{R}}\,ds + d\eta = 0;$$

ou

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\eta}{\mathrm{R}} - 1, \qquad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\xi}{\mathrm{R}};$$

ξ, η sont donnés par deux équations différentielles du premier ordre. Il en résulte que par chaque point du plan P passe une trajectoire orthogonale et une seule. Il existe ainsi une correspondance point par point entre les divers plans P, les points correspondants étant sur une même trajectoire orthogonale.

Considérons dans un plan P deux points M, N ; et soit D la droite MN ; lorsque le plan P varie, la droite D engendre une surface réglée sur laquelle les lieux des points M et N sont trajectoires orthogonales des génératrices ; or, les trajectoires orthogonales interceptent sur les génératrices des segments égaux ; il en résulte que si l'on considère deux positions P, P′, et les positions MN, M′N′ correspondantes, on a MN = M′N′. La correspondance entre les plans P transforme une courbe du plan P en une courbe égale. En particulier, les plans P contenant les lignes de courbure planes, *toutes ces lignes de courbure planes sont égales. La surface* (S) *est donc engendrée par le mouvement d'une courbe plane de forme invariable.* Pour la définir, il suffit de connaître le mouvement de son plan P.



Pour cela, reprenons les équations

$$\frac{d\xi}{ds} - \frac{\eta}{\mathrm{R}} + 1 = 0, \qquad \frac{d\eta}{ds} + \frac{\xi}{\mathrm{R}} = 0, \tag{1}$$

et intégrons-les. Considérons d'abord les équations sans deuxième membre

$$\mathrm{R}\frac{d\xi}{ds} - \eta = 0, \qquad \mathrm{R}\frac{d\eta}{ds} + \xi = 0.$$

Posons

$$\frac{\mathrm{R}}{ds} = \frac{1}{d\varphi},$$

d'où

$$d\varphi = \frac{ds}{\mathrm{R}}; \tag{2}$$

les équations deviennent

$$\frac{d\xi}{d\varphi} - \eta = 0, \qquad \frac{d\eta}{d\varphi} + \xi = 0,$$

équations linéaires sans deuxième membre à coefficients constants, dont la solution générale est

$$\xi = \mathrm{A}\cos\varphi + \mathrm{B}\sin\varphi, \qquad \eta = -\mathrm{A}\sin\varphi + \mathrm{B}\cos\varphi. \tag{3}$$

Passons alors au système avec deuxième membre

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \eta - \mathrm{R}, \qquad \frac{d\eta}{d\varphi} = -\xi. \tag{4}$$

Considérons dans (3) AB comme des fonctions de φ, et cherchons à satisfaire au système (4). Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\varphi} &= \eta + \frac{d\mathrm{A}}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{d\mathrm{B}}{d\varphi}\sin\varphi = \eta - \mathrm{R}, \\ \frac{d\eta}{d\varphi} &= -\xi - \frac{d\mathrm{A}}{d\varphi}\sin\varphi + \frac{d\mathrm{B}}{d\varphi}\cos\varphi = -\xi; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{A}}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{d\mathrm{B}}{d\varphi}\sin\varphi = -\mathrm{R}, \quad -\frac{d\mathrm{A}}{d\varphi}\sin\varphi + \frac{d\mathrm{B}}{d\varphi}\cos\varphi = 0;$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{A}}{d\varphi} = -\mathrm{R}\cos\varphi, \qquad \frac{d\mathrm{B}}{d\varphi} = -\mathrm{R}\sin\varphi;$$

ou, en réintroduisant s d'après la formule (2),

$$\frac{d\mathrm{A}}{ds} = -\cos\varphi, \qquad \frac{d\mathrm{B}}{ds} = -\sin\varphi;$$

et

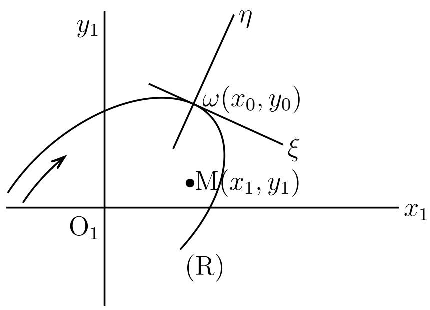
$$\mathrm{A} = -\int\cos\varphi\,ds, \qquad \mathrm{B} = -\int\sin\varphi\,ds.$$

Posons

$$x_0 = \int\cos\varphi\,ds, \qquad y_0 = \int\sin\varphi\,ds;$$

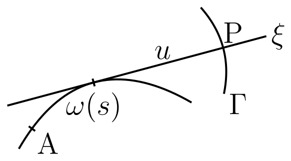
alors
$$A = -x_0, \qquad B = -y_0.$$
Nous avons donc une solution particulière
$$\xi = -x_0 \cos\varphi - y_0 \sin\varphi, \qquad \eta = x_0 \sin\varphi - y_0 \cos\varphi;$$
et la solution générale est, x_1, y_1 désignant deux constantes arbitraires,
$$(5) \qquad \begin{cases} \xi = \quad (x_1 - x_0)\cos\varphi + (y_1 - y_0)\sin\varphi, \\ \eta = -(x_1 - x_0)\sin\varphi + (y_1 - y_0)\cos\varphi. \end{cases}$$
Nous avons trois quadratures à effectuer. Interprétons géométriquement ces résultats :

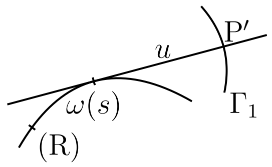
Les formules précédentes, résolues en x_1, y_1, donnent
$$(6) \qquad x_1 = x_0 + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \quad y_1 = y_0 + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi.$$



Prenons dans le plan P deux axes fixes $0_1x_1, 0_1y_1$, et construisons par rapport à ces axes la courbe (R) lieu du point (x_0, y_0). La courbe (R) est la courbe du plan P qui a même rayon de courbure que l'arête de rebroussement (A). Pour chaque valeur de s, le point (x_0, y_0) occupa une position ω sur la courbe (R), et φ est l'angle de la tangente à R en ω avec $0x_1$. Considérons un système d'axes $\omega\xi\eta$, où l'axe $\omega\xi$ est la tangente à (R) correspondant au sens dans lequel se déplace ω ; φ est l'angle de $\omega\xi$ avec O_1x_1 ; ξ, η fonctions de s, sont les coordonnées d'un point M fixe par rapport au système $x_1\mathrm{O}_1y_1$, prises par rapport aux axes $\xi\omega\eta$, et x_1, y_1 sont les coordonnées de ce même point par rapport aux axes $x_1\mathrm{O}_1y_1$. Pour avoir la trajectoire orthogonale, il suffit de porter le plan P dans l'espace, sur le plan osculateur à la courbe (A), $\omega\xi$ et $\omega\eta$ coïncidant respectivement avec $\omega\xi$ et $\omega\eta$; dans ce mouvement, les courbes (R) et (A) coïncideront successivement en tous leurs points ; les rayons de courbure étant les mêmes en grandeur et en signe, les centres de courbure seront confondus. Si S varie, la courbe (R) va rouler sur la courbe (A), et un point quelconque M invariablement lié à la courbe (R) décrira la trajectoire orthogonale. *Le mouvement du plan* P *s'obtiendra donc en faisant rouler la courbe plane* (R) *sur la courbe* (A) *de façon que le plan* P *coïncide à chaque instant avec le plan osculateur à la courbe* (A). On peut dire que *le plan* P *roule sur la développable qu'il enveloppe*, comme nous allons l'expliquer.

Considérons l'arête de rebroussement (A) et une tangente $\omega\xi$; pour développer cette courbe sur un plan, il faut construire la courbe plane dont le rayon de courbure en chaque point ait même expression en fonction de l'arc que celui de la courbe (A), c'est précisément la courbe (R). La position d'un point P sur la développable est définie par l'arc S, qui fixe le point ω sur (A) et par le segment $\omega\mathrm{P} = u$. Le point P′ qui correspond à P dans le développement est déterminé





par les mêmes valeurs de s, u. Les génératrices de la développable viennent se développer suivant les tangentes à la courbe (R). Considérons une courbe (Γ) sur la développable, et la courbe correspondante (Γ_1) dans le plan : les arcs homologues sur ces deux courbes sont égaux, de sorte que toute courbe tracée sur le plan roule sur la courbe correspondante de la développable. *On peut imaginer que l'on ait enroulé sur la développable une feuille plane déformable ; le mouvement du plan* P *consistera alors à dérouler cette feuille de façon qu'elle reste constamment tendue.* Un point quelconque de la feuille décrira une trajectoire orthogonale des plans tangents à la développable. Nous obtenons ainsi en quelque sorte la *surface développante d'une développable* par la généralisation du procédé qui donne les développantes d'une courbe plane.

Nous pouvons enfin examiner le mouvement du plan P au point de vue cinématique. Nous avons

$$\frac{d\mathrm{X}}{ds} = -\frac{a''}{\mathrm{T}}\eta, \qquad \frac{d\mathrm{Y}}{ds} = -\frac{b''}{\mathrm{T}}\eta, \qquad \frac{d\mathrm{Z}}{ds} = -\frac{c''}{\mathrm{T}}\zeta;$$

et par suite les projections de la vitesse sur les axes $\xi\eta\zeta$ invariablement liés au plan P sont

$$\mathrm{V}_\xi = \sum a\,\frac{d\mathrm{X}}{ds} = 0, \quad \mathrm{V}_\eta = \sum a'\frac{d\mathrm{Y}}{ds} = 0, \quad \mathrm{V}_\zeta = \sum a''\frac{d\mathrm{Z}}{ds} = -\frac{1}{\mathrm{T}}\eta.$$

Le mouvement instantané du plan P est une rotation autour de $\omega\xi$ tangente à (A), la rotation instantanée étant $-\frac{1}{\mathrm{T}}$. *Le plan osculateur* P *roule sur la courbe* (A) *en tournant autour de la tangente avec une vitesse de rotation égale à* $-\frac{1}{\mathrm{T}}$.

La surface (S) engendrée par le mouvement précédent est une *surface moulure*, ou *surface de Monge*. Considérons dans le plan P une courbe (c) invariablement liée au système d'axes $\omega\xi\eta$ et sa développée (K). La deuxième nappe de la surface focale sera engendrée par cette développée (K) dans le mouvement du plan P. C'est une surface moulure. Ainsi *une des nappes de la développée d'une surface moulure est une développable, l'autre est une surface moulure.*

Cas particuliers.

Examinons le cas particulier où la développable enveloppe du plan P est un cylindre ou un cône.

1°. Si *le plan* P *enveloppe un cylindre*, les tangentes aux trajectoires orthogonales sont parallèles aux plans de section droite, les trajectoires sont les développantes des sections droites ; ce sont des lignes planes ; *les deux systèmes de lignes de courbure de la surface sont des courbes planes. Le plan* P *roule sur le cylindre de façon que son intersection avec le plan d'une section droite roule sur cette section droite. On peut encore engendrer la surface en considérant dans un plan une famille de courbes parallèles (qui sont ici les développantes de la section droite du cylindre), et en déplaçant chacune de ces courbes d'un mouvement de translation perpendiculaire au plan.*

2°. Si *le plan* P *enveloppe un cône* de sommet A, considérons une trajectoire orthogonale rencontrant le plan P en M, la tangente en M est perpendiculaire à AM, donc la trajectoire orthogonale est une courbe tracée sur une sphère de centre A. Coupons alors le cône par une sphère de centre A et de rayon R, soit (c) l'intersection, et considérons dans le plan P le cercle (S) de centre A et de rayon R. *Le plan* F *roule sur le cône de façon que le cercle* (S) *roule sur la courbe* (c).

Autres hypothèses.

Cherchons maintenant si les deux nappes de la développée d'une surface peuvent être des développables. La surface est alors surface moulure de deux manières ; les deux systèmes de lignes de courbure sont des courbes planes. Les trajectoires orthogonales des plans P, qui enveloppent l'une des nappes de la développée, constituant un des systèmes de lignes de courbure, doivent être planes. Soit P′ le plan de l'une d'elles. Les plans P sont tous normaux à une courbe située dans P′ ; ils sont donc tous perpendiculaires à P′. Si donc les plans P ne sont pas parallèles, les plans P′ le sont tous ; les plans P enveloppent un cylindre, et les plans P′ sont perpendiculaires aux génératrices de ce cylindre, ainsi que les normales à la surface ; le profil situé dans un plan P et qui engendre la surface moulure est une parallèle aux génératrices du cylindre. Les surfaces obtenues sont donc des cylindres ; la seconde nappe de la développée est une droite rejetée à l'infini.

Si les plans P sont parallèles, on arrive à la même conclusion, car les plans P′ enveloppent un cylindre.

Le cas supposé est donc impossible.

Supposons qu'une des nappes de la développée soit une développable, l'autre étant une courbe. La surface est une surface moulure qui s'obtient par le mouvement d'un profil situé dans le plan P qui enveloppe la développable. La deuxième nappe de la développée est engendrée dans ce mouvement par la développée du profil ; pour que ce soit une courbe, il faut que la développée du profil soit un point, donc que ce profil soit un cercle ; imaginons alors la sphère qui a ce profil pour grand cercle ; elle est inscrite dans la surface ; *la surface est une enveloppe de sphères de rayon constant.* C'est une surface canal.

Réciproquement toute enveloppe d'une famille de sphères égales satisfait à la condition précédente. Soit la sphère

$$\sum (x-a)^2 - r^2 = 0,$$

la caractéristique a pour deuxième équation

$$\sum (x - a)\, da = 0.$$

C'est un grand cercle de la sphère ; les normales à la surface enveloppe sont dans le plan de ce cercle. L'une des nappes de la développée sera l'enveloppe des plans de ce cercle. Si nous considérons le lieu du centre de la sphère, le plan du grand cercle lui est constamment normal ; *la surface est engendrée par un cercle de rayon constant dont le centre décrit une courbe, et dont le plan reste constamment normal à cette courbe.*

Enfin comme cas singulier, nous avons encore celui où l'une des nappes de la développée est une droite. La surface est alors de révolution autour de cette droite.

EXERCICES.

32. Étudier la congruence formée des droites tangentes à une sphère et normales à une même surface ; étudier les surfaces normales à ces droites, et leurs lignes de courbure.
33. Étudier la congruence formée des droites normales à une surface dont une famille de lignes de courbure est située sur des sphères concentriques.
34. Montrer que les surfaces moulures, dans le cas où l'une des nappes de la développée est un cylindre ou un cône, peuvent être définies par le mouvement d'un profil plan, de forme invariable, dont le plan reste constamment normal à un cylindre ou à un cône. Préciser le mouvement de ce profil. Chercher si l'on peut dire quelque chose d'analogue pour les surfaces moulures générales.
35. Montrer que les droites tangentes à deux quadriques homofocales constituent une congruence de normales. Si on fait réfléchir toutes ces droites, considérées comme des rayons lumineux, sur une autre quadrique homofocale aux deux premières, quelles seront les multiplicités focales de cette seconde congruence ?
36. Étant données deux surfaces homofocales du second degré et un plan P, si on mène par les droites du plan P des plans tangents aux deux surfaces, les droites qui joignent les points de contact correspondants sont normales à une famille de surfaces parallèles. Soit (δ) la droite qui contient les pôles du plan P par rapport aux deux quadriques homofocales, et (d') la droite du plan P qui correspond à une droite (d) de la congruence de normales considérée. Le plan mené par (δ) perpendiculairement à (d') coupe (d) en un point m. Le lieu du point m est l'une des surfaces cherchées : c'est une cyclide. Les développables de la congruence découpent sur les surfaces homofocales des réseaux conjugués.
37. On considère la congruence des droites de l'espace sur lesquelles trois plans formant un trièdre trirectangle déterminent des segments invariables. Démontrer que c'est une congruence de normales et déterminer les surfaces normales aux droites de la congruence. Déterminer les points focaux sur une quelconque de ces droites. Déterminer les cônes directeurs des développables de la congruence.
38. Démontrer qu'il existe des congruences (isogonales) telles que les plans focaux forment un dièdre constant. Quelle est la propriété des arêtes de rebroussement des développables de la congruence par rapport aux nappes de la surface focale qui les contiennent ? Chercher l'équation différentielle de ces courbes sur la surface focale

supposée donnée. Que peut-on dire du cas où l'une des nappes de la multiplicité focale est une développable, une courbe, une sphère ?

39. Si on considère une famille de sphères dont le lieu des centres ω est une courbe plane C, et dont les rayons sont proportionnels aux distances des centres ω à une droite fixe Δ du plan de la courbe C, démontrer que l'enveloppe de ces sphères a toutes ses lignes de courbure planes. Que peut-on dire des plans de ces lignes de courbure ? Réciproquement, comment peut-on obtenir toutes les surfaces canaux dont toutes les lignes de courbure sont planes ?

CHAPITRE VIII.

LES CONGRUENCES DE DROITES ET LES CORRESPONDANCES ENTRE DEUX SURFACES.

Nouvelle représentation des congruences.

1. Dans ce qui précède, nous avons défini une congruence par son support, et en donnant la direction de la droite ou des droites (D) qui passent par chaque point du support. On peut plus généralement, et ce sera préférable au point de vue projectif, considérer deux surfaces supports se correspondant point par point, les droites de la congruence étant celles qui joignent les points homologues des deux surfaces. En réalité, les deux surfaces se correspondront élément de contact à élément de contact, et en même temps que la congruence des droites joignant les points homologues, on pourra considérer celle des intersections des plans tangents homologues.

Il est naturel alors d'employer des coordonnées homogènes. Soient $\mathrm{M}(x, y, z, t)$ et $\mathrm{M}_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ les points homologues sur les deux surfaces ; on pourra définir la congruence par les équations

$$\mathrm{X} = x + \rho x_1, \qquad \mathrm{Y} = y + \rho y_1, \qquad \mathrm{Z} = z + \rho z_1, \qquad \mathrm{T} = t + \rho t_1.$$

Soient de même u, v, w, r les coordonnées tangentielles d'un plan tangent à la première surface, u_1, v_1, w_1, r_1 celles du plan tangent homologue à la deuxième surface. La congruence pourra être définie au point de vue tangentiel par les équations

$$\mathrm{U} = u + \rho u_1, \qquad \mathrm{V} = v + \rho v_1, \qquad \mathrm{W} = w + \rho w_1, \qquad \mathrm{R} = r + \rho r_1.$$

Soient $(\mathrm{S}), (\mathrm{S}_1)$ les deux surfaces supports ; les systèmes conjugués sur ces surfaces étant invariants, d'après leur définition même, par toute transformation projective, nous sommes conduits à étudier leurs relations. Soient

$$\begin{array}{lllll}
(\mathrm{S}) & x = f(\lambda, \mu), & y = g(\lambda, \mu), & z = h(\lambda, \mu), & t = k(\lambda, \mu); \\
(\mathrm{S}_1) & x_1 = f_1(\lambda, \mu), & y_1 = g_1(\lambda, \mu), & z_1 = h_1(\lambda, \mu), & t_1 = h_1(\lambda, \mu);
\end{array}$$

les équations des deux surfaces.

Le choix des paramètres λ, μ est fixé par le Théorème suivant : *Quand deux surfaces* $(\mathrm{S}), (\mathrm{S}_1)$ *se correspondent point par point, il existe sur* (S) *un réseau conjugué qui correspond à un réseau conjugué de* S_1*, et en général il n'en existe qu'un.* Soient $d\lambda, d\mu$ et $\delta\lambda, \delta\mu$ les paramètres définissant deux directions conjuguées sur (S), elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux directions

$$\mathrm{E}'\, d\lambda^2 + 2\mathrm{F}'\, d\lambda\, d\mu + \mathrm{G}'\, d\mu^2 = 0.$$

De même sur (S_1), deux directions conjuguées sont conjuguées harmoniques par rapport aux directions

$$\mathrm{E}'_1\, d\lambda^2 + 2\mathrm{F}'_1\, d\lambda\, d\mu + \mathrm{G}'_1\, d\mu^2 = 0.$$

Chercher un système conjugué commun revient donc à chercher un couple de points conjugués par rapport à deux couples donnés par deux équations quadratiques ; si les deux formes quadratiques n'ont pas de facteur commun, il y a un couple et un seul répondant à la question. Or, les deux équations précédentes définissent les lignes asymptotiques des deux surfaces ; si donc deux surfaces se correspondent point par point d'une façon telle qu'il n'y ait pas sur (S) une famille d'asymptotiques correspondant à une famille d'asymptotiques de (S_1), il existe un système conjugué de (S) et un seul qui correspond à un système conjugué de (S_1). Il est défini par l'équation :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}'\,d\lambda + \mathrm{F}'\,d\mu & \mathrm{F}'\,d\lambda + \mathrm{G}'\,d\mu \\ \mathrm{E}'_1\,d\lambda + \mathrm{F}'_1\,d\mu & \mathrm{F}'_1\,d\lambda + \mathrm{G}'_1\,d\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Il y aura impossibilité si les formes ont un facteur commun, et indétermination si les deux facteurs sont communs, c'est-à-dire, si les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces. Écartant ces cas d'exception, nous supposerons que les paramètres λ, μ correspondent à ce système conjugué commun.

Emploi des coordonnées homogènes.

2. Nous allons reprendre les formules usuelles et voir ce qu'elles deviennent en coordonnées homogènes.

Une *courbe* en coordonnées homogènes est définie par quatre équations

$$x = f(\lambda), \qquad y = g(\lambda), \qquad z = h(\lambda), \qquad t = k(\lambda).$$

La tangente au point $\mathrm{M}(x, y, z, t)$ joint le point M au point

$$\mathrm{M}'\left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dy}{d\lambda}, \frac{dz}{d\lambda}, \frac{dt}{d\lambda}\right).$$

Le plan osculateur passe par la droite MM′ et par le point

$$\mathrm{M}''\left(\frac{d^2x}{d\lambda^2}, \frac{d^2y}{d\lambda^2}, \frac{d^2z}{d\lambda^2}, \frac{d^2t}{d\lambda^2}\right).$$

Corrélativement une *développable* sera l'enveloppe du plan P

$$u = f(\lambda), \qquad v = g(\lambda), \qquad w = h(\lambda), \qquad r = k(\lambda).$$

La caractéristique (génératrice) sera l'intersection du plan P et du plan $\mathrm{P}'\left(\frac{du}{d\lambda}, \frac{dv}{d\lambda}, \frac{dw}{d\lambda}, \frac{dr}{d\lambda}\right)$. Le point de contact avec l'arête de rebroussement sera en outre dans le plan $\mathrm{P}''\left(\frac{d^2u}{d\lambda^2}, \frac{d^2v}{d\lambda^2}, \frac{d^2w}{d\lambda^2}, \frac{d^2r}{d\lambda^2}\right)$.

Une *surface* quelconque peut se définir au point de vue ponctuel par

$$x = f(\lambda, \mu), \qquad y = g(\lambda, \mu), \qquad z = h(\lambda, \mu), \qquad t = k(\lambda, \mu);$$

et au point de vue tangentiel par

$$u = \mathrm{F}(\lambda, \mu), \qquad v = \mathrm{G}(\lambda, \mu), \qquad w = \mathrm{H}(\lambda, \mu), \qquad r = \mathrm{K}(\lambda, \mu).$$

On peut définir le *plan tangent* en fonction du point de contact (x, y, z, t). Ce plan contient le point, donc

$$\sum ux = 0;$$

il contient les tangentes aux courbes $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$, donc les points $\left(\dfrac{\partial x}{\partial \mu}, \dfrac{\partial y}{\partial \mu}, \dfrac{\partial z}{\partial \mu}, \dfrac{\partial t}{\partial \mu}\right)$ et $\left(\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}, \dfrac{\partial y}{\partial \lambda}, \dfrac{\partial z}{\partial \lambda}, \dfrac{\partial t}{\partial \lambda}\right)$.

$$\sum u\frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0, \qquad \sum u\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0;$$

et nous avons ainsi trois équations définissant des quantités proportionnelles à u, v, w, r. On peut écrire l'équation ponctuelle du plan tangent au point (x, y, z, t)

$$\begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} & \mathrm{T} \\ x & y & z & t \\ \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial z}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial t}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu} & \dfrac{\partial y}{\partial \mu} & \dfrac{\partial z}{\partial \mu} & \dfrac{\partial t}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Corrélativement on définira un *point* de la surface en fonction du plan tangent en ce point, au moyen des équations :

$$\sum ux = 0, \qquad \sum x\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0, \qquad \sum x\frac{\partial u}{\partial \mu} = 0;$$

de sorte qu'en définitive, on peut définir l'un des éléments point, plan tangent, en fonction de l'autre au moyen des formules

$$\sum ux = 0, \qquad \sum u\,dx = 0, \qquad \sum x\,du = 0.$$

Proposons-nous maintenant d'*exprimer que deux directions* $\mathrm{MT}(d\lambda, d\mu)$ *et* $\mathrm{MS}(\delta\lambda, \delta\mu)$ *sont conjuguées.* Ces deux directions sont conjuguées si, le point de contact du plan tangent se déplaçant dans la direction MT, MS est la caractéristique de ce plan tangent. Or, cette caractéristique est

$$\sum u\mathrm{X} = 0, \qquad \sum du\,\mathrm{X} = 0;$$

la droite MS est définie par le point (x, y, z, t) et le point $(\delta x, \delta y, \delta z, \delta t)$. Pour exprimer que MS est la caractéristique, il faut exprimer que les deux points précédents sont sur la caractéristique, ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\sum ux = 0, &\qquad &\sum du\,x = 0; \\ &\sum u\,\delta x = 0, &\qquad &\sum du\,\delta x = 0; \end{aligned}$$

les trois premières équations sont vérifiées, nous avons donc la condition unique

$$\sum du\,\delta x = 0,$$

ou la condition symétrique

$$\sum \delta u \, dx = 0.$$

En particulier nous trouvons la condition pour qu'une direction soit conjuguée d'elle-même, c'est-à-dire soit direction asymptotique

$$\sum du \, dx = 0.$$

Exprimons alors que les directions $\lambda =$ const., $\mu =$ const. forment un réseau conjugué. Nous avons

$$\sum \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} = 0. \tag{1}$$

Cette condition peut se transformer : l'équation

$$\sum u \frac{\partial x}{\partial \mu} = 0$$

différentiée par rapport à λ donne

$$\sum \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \sum u \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu} = 0;$$

et (1) s'écrit

$$\sum u \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu} = 0. \tag{2}$$

De même l'équation

$$\sum u \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0$$

différentiée par rapport à μ donne

$$\sum \frac{\partial u}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \sum u \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu} = 0,$$

et (1) peut s'écrire

$$\sum \frac{\partial u}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0. \tag{3}$$

En partant de l'une des relations

$$\sum x \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0, \qquad \sum x \frac{\partial u}{\partial \mu} = 0,$$

on obtiendrait la relation

$$\sum x \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda \, \partial \mu} = 0. \tag{4}$$

Ces quatre équations (1), (2), (3), (4) dépendent simultanément des éléments ponctuel et tangentiel. En exprimant u, v, w, r en fonction de x, y, z, t, on obtient la condition en coordonnées ponctuelles :

$$\left| x \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu} \right| = 0. \tag{5}$$

Dans cette relation (5), le premier membre représente, par abréviation, le déterminant dont la première ligne serait la ligne écrite entre les deux traits verticaux, et dont les trois autres lignes se déduiraient de celle-là en y remplaçant x par y, z, t. Cette notation sera employée couramment dans la suite.

Lorsque $t =$ const., la condition (5) se réduit à la condition connue

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial x}{\partial \mu} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu} \right| = \mathrm{F}' = 0.$$

La condition (5) peut s'interpréter autrement : il existe une même relation linéaire et homogène entre les éléments correspondants des lignes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \, \partial \mu} &= \mathrm{L}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \mathrm{N}x, \\
\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \, \partial \mu} &= \mathrm{L}\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \mathrm{M}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \mathrm{N}y, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \, \partial \mu} &= \mathrm{L}\frac{\partial z}{\partial \lambda} + \mathrm{M}\frac{\partial z}{\partial \mu} + \mathrm{N}z, \\
\frac{\partial^2 t}{\partial \lambda \, \partial \mu} &= \mathrm{L}\frac{\partial t}{\partial \lambda} + \mathrm{M}\frac{\partial t}{\partial \mu} + \mathrm{N}t,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire : *les quatre coordonnées homogènes x, y, z, t satisfont à une même équation linéaire aux dérivées partielles de la forme* :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \, \partial \mu} = \mathrm{L}\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \mathrm{M}\frac{\partial f}{\partial \mu} + \mathrm{N}f.$$

En opérant au point de vue tangentiel, on verrait de même que *la condition cherchée est que u, v, w, r soient intégrales d'une même équation* :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \, \partial \mu} = \mathrm{P}\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \mathrm{Q}\frac{\partial f}{\partial \mu} + \mathrm{R}f.$$

On montrerait sans peine que si x, y, z, t ou u, v, w, r satisfont à une équation de la forme précédente, elles ne satisfont qu'à une seule.

Remarque. En coordonnées cartésiennes, $t = 1$, $r = 1$, et on a $\mathrm{R} = \mathrm{N} = 0$.

Considérons une *surface réglée* ; les équations d'une génératrice, joignant le point $\mathrm{M}(x, y, z, t)$ au point $\mathrm{M}_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ sont :

$$\mathrm{X} = x + \rho x_1, \qquad \mathrm{Y} = y + \rho y_1, \qquad \mathrm{Z} = z + \rho z_1, \qquad \mathrm{T} = t + \rho t_1.$$

Supposons la surface *développable* ; les plans tangents aux points (x, y, z, t) et (x_1, y_1, z_1, t_1) sont les mêmes. Or, le plan tangent en M passant par la génératrice et par la tangente à la courbe $\rho = 0$ contient le point (dx, dy, dz, dt). De même le plan tangent en M_1, contient le point (dx_1, dy_1, dz_1, dt_1). La condition pour que les plans soient confondus est donc

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & dx & dx_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous définissions la surface en coordonnées tangentielles, nous arriverions de même à la condition

$$\begin{vmatrix} u & u_1 & du & du_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Voyons enfin une *congruence* : nous pouvons encore la représenter par les équations

$$X = x + \rho x_1, \qquad Y = y + \rho y_1, \qquad Z = z + \rho z_1, \qquad T = t + \rho t_1;$$

mais ici x, y, z, t et x_1, y_1, z_1, t_1, sont fonctions de deux paramètres arbitraires (λ, μ). Cherchons les *éléments focaux*. Soit F un foyer d'une droite $D(\lambda, \mu)$. Soit ρ la valeur du paramètre qui correspond à ce point. Toutes les surfaces réglées de la congruence qui contiennent la droite D ont en ce point F même plan tangent. Considérons en particulier les surfaces $\lambda =$ const. et $\mu =$ const. Les plans tangents à ces surfaces contiennent respectivement les points (x, y, z, t), (x_1, y_1, z_1, t_1), $\left(\dfrac{\partial x}{\partial \mu} + \rho \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu}, \dots\right)$ et (x, y, z, t), (x_1, y_1, z_1, t_1), $\left(\dfrac{\partial x}{\partial \lambda} + \rho \dfrac{\partial x_1}{\partial \lambda}, \dots\right)$. La condition pour que ces plans coïncident, c'est-à-dire l'*équation aux points focaux*, est donc

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} + \rho \dfrac{\partial x_1}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial x}{\partial \mu} + \rho \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0;$$

On trouvera de même l'*équation aux plans focaux* :

$$\begin{vmatrix} u & u_1 & \dfrac{\partial u}{\partial \lambda} + \rho \dfrac{\partial u_1}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial u}{\partial \mu} + \rho \dfrac{\partial u_1}{\partial \mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Correspondances spéciales.

3. Nous allons étudier la *correspondance entre deux points* M, M_1, *de deux surfaces telle que les développables de la congruence des droites* MM_1 *coupent les deux surfaces suivant les deux réseaux conjugués qui se correspondent*. Nous supposerons que les paramètres λ, μ qui fixent la position d'un point sur chacune des surfaces sont précisément tels quo les courbes conjuguées homologues soient $\lambda =$ const. et $\mu =$ const. Les courbes $\lambda =$ const., $\mu =$ const. sont conjuguées sur la première surface (S) donc x, y, z, t satisfont à une même équation différentielle

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \, \partial \mu} = P \frac{\partial f}{\partial \lambda} + Q \frac{\partial f}{\partial \mu} + Rf; \tag{1}$$

de même les courbes $\lambda = \text{const.}$ et $\mu = \text{const.}$ étant conjuguées sur la deuxième surface (S_1), x_1, y_1, z_1, t_1 satisfont à une même équation différentielle

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \mathrm{P}_1\frac{\partial f}{\partial\lambda} + \mathrm{Q}_1\frac{\partial f}{\partial\mu} + \mathrm{R}_1 f. \tag{2}$$

Exprimons maintenant que les développables de la congruence correspondent à $\lambda = \text{const.}$ et $\mu = \text{const.}$ Si nous représentons la congruence par les équations

$$\mathrm{X} = x + \rho x, \qquad \mathrm{Y} = y + \rho y, \qquad \mathrm{Z} = z + \rho z, \qquad \mathrm{T} = t + \rho t,$$

les développables sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & dx & dx_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial\lambda}\,d\lambda + \frac{\partial x}{\partial\mu}\,d\mu, & dy &= \dots\dots, & dz &= \dots\dots, & dt &= \dots\dots, \\ dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\,d\lambda + \frac{\partial x_1}{\partial\mu}\,d\mu, & dy_1 &= \dots\dots, & dz_1 &= \dots\dots, & dt_1 &= \dots\dots; \end{aligned}$$

et l'équation précédente devant être vérifiée pour $d\lambda = 0$, $d\mu = 0$, nous avons les conditions

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & \dfrac{\partial x}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial x_1}{\partial\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & \dfrac{\partial x}{\partial\mu} & \dfrac{\partial x_1}{\partial\mu} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Il existe une même relation linéaire et homogène entre les éléments des colonnes, donc

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \mathrm{A}_1 x_1 + \mathrm{B}_1\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}, \qquad \text{et les analogues} \quad \dots\dots, \tag{5}$$

$$\mathrm{C}x + \mathrm{D}\frac{\partial x}{\partial\mu} = \mathrm{C}_1 x_1 + \mathrm{D}_1\frac{\partial x_1}{\partial\mu}, \qquad \text{et les analogues} \quad \dots\dots. \tag{6}$$

Premier Cas. Voyons d'abord ce qui arrive si l'un des quatre coefficients $\mathrm{B}, \mathrm{B}_1, \mathrm{D}, \mathrm{D}_1$ est nul. Soit $\mathrm{B}_1 = 0$. Alors les équations (5) expriment que le point $\mathrm{M}_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ est sur la droite qui joint les points $\mathrm{M}(x, y, z, t)$ et

$$\mathrm{M}\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \frac{\partial y}{\partial\lambda}, \frac{\partial z}{\partial\lambda}, \frac{\partial t}{\partial\lambda}\right).$$

La droite MM_1 est tangente à la courbe $\mu = \text{const.}$ tracée sur la surface (S). Toutes les droites MM_1 sont ainsi tangentes à la surface (S) qui est une des nappes de la surface focale de la congruence. Sur la surface (S) les courbes $\mu = \text{const.}$ correspondent à une famille de développables, et par suite les courbes $\lambda = \text{const.}$ conjuguées des précédentes correspondent à la deuxième famille. Il nous faut alors chercher comment on peut définir (S_1) pour que cette surface soit coupée suivant un réseau conjugué par les développables de la congruence. Les équations (5) peuvent s'écrire dans le cas considéré

$$x_1 = \mathrm{A}x + \mathrm{B}\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \quad y_1 = \mathrm{A}y + \mathrm{B}\frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad z_1 = \mathrm{A}z + \mathrm{B}\frac{\partial z}{\partial \lambda}, \quad t_1 = \mathrm{A}t + \mathrm{B}\frac{\partial t}{\partial \lambda}.$$

Posons

$$x = \theta\mathrm{X}, \qquad y = \theta\mathrm{Y}, \qquad z = \theta\mathrm{Z}, \qquad t = \theta\mathrm{T};$$

nous avons alors

$$x_1 = \mathrm{A}\theta\mathrm{X} + \mathrm{B}\left(\theta\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \mathrm{X}\frac{\partial \theta}{\partial \lambda}\right), \quad y_1 = \ldots\ldots, \quad z_1 = \ldots\ldots, \quad t_1 = \ldots\ldots;$$

déterminons la fonction θ par la relation

$$\mathrm{A}\theta + \mathrm{B}\frac{d\theta}{d\lambda} = 0,$$

ce qui est toujours possible. Nous avons

$$x_1 = \mathrm{A}\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \qquad y_1 = \mathrm{A}\frac{\partial y}{\partial \lambda}, \qquad z_1 = \mathrm{A}\frac{\partial z}{\partial \lambda}, \qquad t_1 = \mathrm{A}\frac{\partial t}{\partial \lambda};$$

et comme les coordonnées homogènes ne sont définies qu'à un facteur près, nous pouvons écrire

$$(7) \qquad x_1 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \qquad y_1 = \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \qquad z_1 = \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \qquad t_1 = \frac{\partial t}{\partial \lambda}.$$

Alors, d'après ces relations, l'équation différentielle (1) s'écrit

$$(8) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \mu} = \mathrm{P}x_1 + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \mathrm{R}x,$$

condition de la forme (6). Les équations (3) et (4) sont alors vérifiées. Différentions la relation (8) par rapport à λ

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \lambda\, \partial \mu} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \lambda}x_1 + \mathrm{P}\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \lambda}\,\frac{\partial x}{\partial \mu} + \mathrm{Q}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \lambda x} + \mathrm{R}\frac{\partial x}{\partial \lambda}.$$

Mais, x_1 vérifiant l'équation (2), nous avons

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \lambda\, \partial \mu} = \mathrm{P}_1\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + \mathrm{Q}_1\frac{\partial x_1}{\partial \mu} + \mathrm{R}_1 x_1,$$

et nous obtenons ainsi

$$(9) \quad \mathrm{P}_1\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + \mathrm{Q}_1\frac{\partial x_1}{\partial \mu} + \mathrm{R}_1 x_1 = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \lambda}x_1 + \mathrm{P}\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \lambda}\,\frac{dx}{d\mu} + \mathrm{Q}\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \lambda}\,x + \mathrm{R}\frac{\partial x}{\partial \lambda};$$

(8), (9) sont deux équations en x et $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$. Si on peut les résoudre, on en peut tirer x en particulier, en fonction linéaire de x_1, $\dfrac{\partial x_1}{\partial \lambda}$, et $\dfrac{\partial x_1}{\partial \mu}$; car $\dfrac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu} = \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu}$ et $\dfrac{\partial x}{\partial \lambda} =$

x_1 s'exprime en fonction linéaire de ces trois quantités ; donc le point $\mathrm{M}(x, y, z, t)$ se trouve dans le plan des trois points (x_1, y_1, z_1, t_1), $\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial\lambda}, \dfrac{\partial y_1}{\partial\lambda}, \dfrac{\partial z_1}{\partial\lambda}, \dfrac{\partial t_1}{\partial\lambda}\right)$, $\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial\mu}, \dfrac{\partial y_1}{\partial\mu}, \dfrac{\partial z_1}{\partial\mu}, \dfrac{\partial t_1}{\partial\mu}\right)$, c'est-à-dire dans le plan tangent en M_1, à la surface (S_1). La droite MM_1 est donc aussi tangente à (S_1), et (S_1) est la deuxième nappe de la surface focale. Nous avons ainsi établi une *correspondance point par point entre les deux nappes de la surface focale d'une congruence.*

Écartons ce cas ; il faut alors supposer que les équations (8), (9) ne sont pas résolubles en x et $\dfrac{\partial x}{\partial\mu}$; ce qui exige que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Q} & \mathrm{R} \\ \dfrac{\partial\mathrm{Q}}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial\mathrm{R}}{\partial\lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\mathrm{Q}\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial\lambda} - \mathrm{R}\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial\lambda} = 0;$$

ce qui exprime que $\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$ est fonction de μ seulement

$$\mathrm{R} = \mathrm{Q}\psi(\mu).$$

Reprenons alors la relation (8), et multiplions les quatre coordonnées x, y, z, t par un facteur fonction de μ de façon à simplifier la relation (8), qui s'écrit

$$\frac{\partial x_1}{\partial\mu} = \mathrm{P}x_1 + \mathrm{Q}\left[\frac{\partial x}{\partial\mu} + x\psi(\mu)\right].$$

On peut multiplier x par un facteur ω tel que l'expression entre crochets se réduise $\theta\omega\dfrac{\partial x}{\partial\mu}$; comme ce facteur ω ne dépend pas de λ, les équations (7) subsistent, et nous avons des relations de la forme

$$\frac{\partial x_1}{\partial\mu} = \mathrm{P}x_1 + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial\mu}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial\mu} = \ldots\ldots, \quad \frac{\partial z_1}{\partial\mu} = \ldots\ldots, \quad \frac{\partial t_1}{\partial\mu} = \ldots\ldots.$$

Ceci revient à supposer $\mathrm{R} = 0$ dans les équations (1) ; ce qui donne enfin

$$(10) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \mathrm{P}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial\mu}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \ldots, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \ldots, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \ldots.$$

Il est facile de voir que si x, y, z, t satisfont à (10), les conditions (1), (2), (3), (4) sont satisfaites. Tout d'abord (3) et (4) le sont, ainsi que (1). Voyons alors (2). Les équations (10) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial x_1}{\partial\mu} = \mathrm{P}x_1 + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial\mu},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\lambda}x_1 + \mathrm{P}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda} + \mathrm{Q}\frac{\partial x_1}{\partial\mu} + \frac{1}{\mathrm{Q}}\left(\frac{\partial x_1}{\partial\mu} - \mathrm{P}x_1\right)\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial\lambda},$$

ce qui est bien une équation de la forme (2).

Deuxième Cas. Nous supposons maintenant $\mathrm{B}, \mathrm{B}_1, \mathrm{D}, \mathrm{D}_1, \neq 0$. Reprenons les équations (5), (6). En multipliant x, y, z, t et x_1, y_1, z_1, t_1, par des facteurs convenables, on peut faire disparaître dans (5) le terme en x et le terme en x_1, de sorte que nous pouvons écrire

$$(11) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} = \mathrm{L}\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} = \mathrm{L}\frac{\partial y}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial \lambda} = \mathrm{L}\frac{\partial z}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial t_1}{\partial \lambda} = \mathrm{L}\frac{\partial t}{\partial \lambda}.$$

L'équation (6) peut s'écrire

$$(12) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \mu} = \mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \mathrm{N}x + \mathrm{S}x_1;$$

différentions par rapport à λ en tenant compte de (11), nous avons

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\mathrm{L}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda}(\mathrm{N}x) + \frac{\partial}{\partial \lambda}(\mathrm{S}x_1);$$

$\dfrac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu}$ peut d'après (1) s'exprimer en fonction de x, $\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}$ et $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$, et la relation précédente s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(\mathrm{S}x_1) = \mathrm{F}\left(x, \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial x}{\partial \mu}\right),$$

F étant une fonction linéaire, ce qu'on peut écrire encore

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \lambda}x_1 + \mathrm{SL}\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \mathrm{F}\left(x, \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial x}{\partial \mu}\right).$$

Si $\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \lambda} \neq 0$, x_1 est fonction linéaire de x, $\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$. Le point M est dans le plan tangent en M à la surface (S), qui est alors une des nappes de la surface focale, cas qui a été précédemment examiné. Il faut donc supposer $\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \lambda} = 0$, S n'est fonction que de μ. Alors si nous reprenons l'équation (12), nous pouvons multiplier x_1, y_1, z_1, t_1 par une fonction de μ telle que le terme en x_1 disparaîsse, les relations (11) subsistant. Et nous ramènerons (12) à la forme

$$\frac{\partial x_1}{\partial \mu} = \mathrm{H}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \mathrm{K}x.$$

Le même raisonnement montrera que K est indépendant de λ et que par suite on peut faire disparaître le terme en x ; finalement on a

$$(13) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \mu} = \mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \mu} = \mathrm{M}\frac{\partial y}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial \mu} = \mathrm{M}\frac{\partial z}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial t_1}{\partial \mu} = \mathrm{M}\frac{\partial t}{\partial \mu}.$$

Les relations (11) et (13) sont d'ailleurs suffisantes, car on en conclut

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \lambda\, \partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\mathrm{L}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right),$$
$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \lambda\, \partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial \mu}\right);$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mathrm{L}\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right), \tag{14}$$

équation de la forme (1), où $\mathrm{R} = 0$; on obtiendrait de même

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\partial x_1}{\partial\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\right), \tag{15}$$

équation de la forme (2) où $\mathrm{R}_1 = 0$.

Conclusions.

Dans le *premier cas*, nous avons été ramenés à faire disparaître le terme en x dans l'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \mathrm{P}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \mathrm{R}x \tag{1}$$

au moyen de la substitution

$$x = \omega\mathrm{X}$$

on trouve immédiatement la condition

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \mathrm{P}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} + \mathrm{Q}\frac{\partial\omega}{\partial\mu} + \mathrm{R}\omega,$$

et on peut dire alors que *la surface* (S_1) *est définie par les équations*

$$x_1 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{x}{\omega}\right), \qquad y_1 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{y}{\omega}\right), \qquad z_1 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{z}{\omega}\right), \qquad t_1 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{t}{\omega}\right),$$

ω *étant une solution de l'équation* (1).

Passons au *deuxième cas* : il faut encore faire disparaître le terme en x de l'équation (1), ce qui revient à chercher une intégrale de cette équation. L'équation prend alors la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \mathrm{P}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial\mu}. \tag{2}$$

Identifions avec l'équation (14) précédemment obtenue. Nous avons

$$\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\mu} = \mathrm{P}(\mathrm{M}-\mathrm{L}), \qquad \frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\lambda} = \mathrm{Q}(\mathrm{L}-\mathrm{M});$$

posons alors

$$\mathrm{L} - \mathrm{M} = \theta,$$

et nous aurons

$$\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\mu} = -\mathrm{P}\theta, \qquad \frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\lambda} = \mathrm{Q}\theta;$$

et l'on voit immédiatement que θ doit être intégrale de l'équation

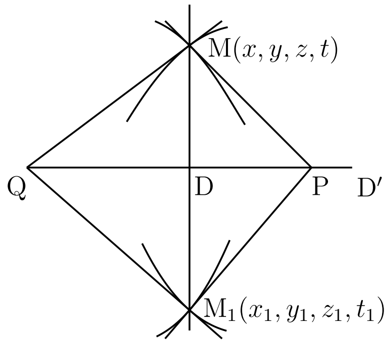
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\lambda\,\partial\mu} + \frac{\partial(\mathrm{P}\theta)}{\partial\lambda} + \frac{\partial(\mathrm{Q}\theta)}{\partial\mu} = 0, \tag{3}$$

qui est ce qu'on appelle *l'adjointe* de (2). Ayant θ, on détermine par quadratures L et M ; car

$$\mathrm{L} = -\int \mathrm{P}\theta\,d\mu, \qquad \mathrm{M} = \int \mathrm{Q}\theta\,d\lambda.$$

Propriétés de la correspondance précédente.

Soient $\mathrm{M}(x, y, z, t)$, $\mathrm{M}_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$; soit maintenant P le point de coordon-



nées $\left(\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}, \dots\right)$ ou $\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial \lambda}, \dots\right)$ et Q le point $\left(\dfrac{\partial x}{\partial \mu}, \dots\right)$ ou $\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial \mu}, \dots\right)$, de sorte que la droite PM est tangente à la courbe $\mu =$ const. sur la surface (S) et PM_1 à la courbe $\mu =$ const., sur la surface (S_1), et de même la droite QM est tangente à la courbe $\lambda =$ const. sur la surface (S), et QM_1 à la courbe $\lambda =$ const. sur la surface (S_1). Les plans tangents aux deux surfaces $(\mathrm{S}), (\mathrm{S}_1)$ aux points M, M_1 se coupent suivant la droite PQ. Considérons la congruence de ces droites PQ. On peut la définir par les équations

$$\mathrm{X} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \rho \frac{\partial x}{\partial \mu}, \quad \mathrm{Y} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \rho \frac{\partial y}{\partial \mu}, \quad \mathrm{Z} = \frac{\partial z}{\partial \lambda} + \rho \frac{\partial z}{\partial \mu}, \quad \mathrm{T} = \frac{\partial t}{\partial \lambda} + \rho \frac{\partial t}{\partial \mu}.$$

Les développables de cette congruence sont définies par l'équation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial x}{\partial \mu} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}\, d\lambda + \dfrac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu} d\mu & \dfrac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu}\, d\lambda + \dfrac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} d\mu \end{vmatrix} = 0;$$

mais on a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu} = \mathrm{P} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \mathrm{Q} \frac{\partial x}{\partial \mu},$$

de sorte que l'équation précédente se réduit à

$$d\lambda\, d\mu = 0.$$

Les développables de la congruence des droites PQ *correspondent donc aux développables de la congruence des droites* MM_1*, c'est-à-dire encore aux systèmes conjugués homologues.*

Cherchons maintenant les points focaux. Ils sont donnés par l'équation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial x}{\partial \mu} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} + \rho \dfrac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial \lambda\, \partial \mu} + \dfrac{\rho \partial^2 x}{\partial \mu^2} \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui, à cause de la même condition que précédemment, se réduit à $\rho = 0$; une racine est nulle, l'autre infinie ; *les points focaux ne sont autres que les points* P, Q. *Ils sont dans les plans focaux de la congruence* MM_1.

Considérons le point P, et supposons que l'on fasse $\lambda = \text{const}$. La direction de la tangente à la trajectoire du point P est définie par un deuxième point, dont les coordonnées sont

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right) = \mathrm{P}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial\mu},$$

et les analogues. C'est un point de PQ. Le point P décrit une courbe tangente à PQ, arête de rebroussement de la développable correspondant à $\lambda = \text{const}$. Le point Q décrira de même l'arête de rebroussement de la développable correspondant à $\mu = \text{const}$.

Les propriétés de la correspondance que nous venons d'étudier se transforment en elles-mêmes par dualité. En choisissant convenablement les coordonnées tangentielles homogènes, on aurait donc

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial\lambda} = \mathrm{H}\frac{\partial u}{\partial\lambda}, \quad \text{et les analogues}\,; \quad \ldots\ldots, \\ &\frac{\partial u_1}{\partial\mu} = \mathrm{K}\frac{\partial u}{\partial\mu}, \quad \text{et les analogues.} \quad \ldots\ldots. \end{aligned}$$

Appelons alors congruence (K) celle des droites MM_1, congruence (K′) celle des droites PQ. *Si les développables de la congruence* (K) *coupent les surfaces* $(\mathrm{S}), (\mathrm{S}_1)$ *suivant deux réseaux conjugués, les développables de la congruence* (K′) *sont circonscrites à ces surfaces suivant les mêmes réseaux, et réciproquement. Les points focaux de* (K′) *sont dans les plans focaux de* (K), *chaque point focal se trouvant dans le plan focal qui ne lui correspond pas.*

Correspondance par plans tangents parallèles.

4. Soit sur la surface (S) l'une des courbes (c) du réseau conjugué qui correspond à un réseau conjugué sur (S_1) et soit (c_1) la courbe correspondante sur (S_1). Supposons qu'en deux points homologues les plans tangents aux surfaces $(\mathrm{S}), (\mathrm{S}_1)$ soient parallèles ; leurs caractéristiques le sont aussi ; donc *les directions conjuguées homologues sont parallèles.* Faisons $t = 1$ et $t_1 = 1$, nous avons

$$\frac{\partial x_1}{\partial\lambda} = \mathrm{L}\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial\lambda} = \mathrm{L}\frac{\partial y}{\partial\lambda}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial\lambda} = \mathrm{L}\frac{\partial z}{\partial\lambda}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial\mu} = \mathrm{M}\frac{\partial x}{\partial\mu} \qquad \frac{\partial y_1}{\partial\mu} = \mathrm{M}\frac{\partial y}{\partial\mu} \qquad \frac{\partial z_1}{\partial\mu} = \mathrm{M}\frac{\partial z}{\partial\mu}. \tag{2}$$

Nous pouvons donc appliquer les résultats précédemment obtenus. Les plans tangents en M, M_1 étant parallèles, la droite PQ est à l'infini. Les droites de la congruence (K′) sont les droites du plan de l'infini. Sur chacune de ces droites, les points P, Q sont les points où elles sont rencontrées par les tangentes conjuguées homologues sur $(\mathrm{S}), (\mathrm{S}_1)$, et le lieu des points P, Q est tangent à chaque droite PQ aux points P, Q.

Cas particulier.

En particulier, supposons que, la surface (S) étant quelconque, la surface (S_1) soit une sphère. La congruence des droites MM_1 a des développables qui découpent sur $(S), (S_1)$ des réseaux conjugués, les tangentes homologues étant parallèles. Or, sur une sphère, un réseau conjugué est un réseau orthogonal; donc le réseau conjugué de (S) est aussi un réseau orthogonal, ce sont les *lignes de courbure*, dont la recherche est ainsi ramenée à celle des développables d'une congruence. En particulier, supposons la surface (S) du deuxième degré, et considérons la congruence des droites PQ du plan de l'infini. Le plan de l'infini coupe $(S), (S_1)$ suivant deux coniques $(\Gamma), (\Gamma_1)$. Considérons leurs points d'intersection avec une droite PQ; les points d'intersection avec (Γ) correspondent aux directions des génératrices de (S) qui passent par M, et qui sont les tangentes asymptotiques; les points P, Q qui correspondent aux directions principales sont donc conjugués par rapport à ces points d'intersection, c'est-à-dire conjugués par rapport à la conique (Γ). Ils sont de même conjugués par rapport à (Γ_1). Les points P, Q sont les points doubles de l'involution déterminée sur la droite PQ par le faisceau de coniques ayant pour bases $(\Gamma), (\Gamma_1)$. La droite PQ est tangente en P, Q aux deux coniques de ce faisceau qui lui sont tangentes; de sorte que la détermination des développables de la congruence (K), c'est-à-dire des lignes de courbure de la quadrique (S), revenant à celle d'un faisceau de coniques, peut se faire algébriquement. Si on prend pour paramètres ceux des génératrices rectilignes qui passent par un point de (S), on obtient ainsi l'intégration de l'*équation d'Euler*.

Remarque. Au lieu du plan de l'infini, on pourrait considérer un plan fixe quelconque (Π). La correspondance serait telle que les plans tangents en deux points homologues de $(S), (S_1)$ se coupent dans le plan Π. Les résultats seraient analogues; et de même si, corrélativement, on établissait entre les deux surfaces une correspondance telle que la droite MM_1 passe par un point fixe.

Considérons deux surfaces $(S), (S_1)$ qui se correspondent par plans tangents parallèles. Prenons dans l'espace un point fixe O, et substituons à (S_1) une de ses homothétiques par rapport à O, (S'_1). A tout réseau conjugué sur (S_1) correspond sur (S'_1) un réseau homothétique qui est aussi conjugué, et le réseau conjugué de (S) qui correspond à un réseau conjugué sur (S'_1) correspond aussi à un réseau conjugué sur (S'_1). Imaginons que le rapport d'homothétie croisse indéfiniment le point M'_1 homothétique de M_1 s'éloigne à l'infini, la droite MM_1 est la parallèle menée par M au rayon OM. Donc, *si l'on a deux surfaces* $(S), (S_1)$ *se correspondant par plans tangents parallèles, si on prend dans l'espace un point fixe* O, *et si par le point* M *de* (S) *on mène la parallèle* MN *au rayon* OM_1, *les développables de la congruence des droites* MN *découpent sur* (S) *le réseau conjugué qui correspond à un réseau conjugué sur* (S_1). Si en particulier nous prenons pour (S_1) une sphère, pour O son centre, OM_1 est perpendiculaire au plan tangent à (S_1), et par conséquent au plan tangent à (S); MN qui lui est parallèle est la normale à (S). *La congruence des normales à une surface a des développables qui déterminent sur cette surface un réseau conjugué orthogonal.* On retrouve donc la propriété fondamentale des lignes de courbure de la surface (S).

Remarquons encore que si le rayon de la sphère (S_1) est égal à $1, x, y, z$, sont les cosinus directeurs de la normale, et les formules (1), (2) ne sont autres que les formules d'Olinde Rodrigues.

EXERCICES.

40. On donne deux courbes C, C_1. Trouver toutes les surfaces S sur lesquelles les courbes de contact des cônes circonscrits à S, ayant leurs sommets sur C et C_1, forment un réseau conjugué. En définissant C et C_1 par les équations

$$\begin{aligned} &x = f(\lambda), \quad && y = g(\lambda), \quad && z = h(\lambda), \quad && t = k(\lambda); \\ &x = \varphi(\mu), && y = \psi(\mu), && z = \chi(\mu), && t = \theta(\mu), \end{aligned}$$

la surface la plus générale répondant à la question est définie par les équations

$$\begin{aligned} x &= \int \mathrm{A}(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda + \int \mathrm{B}(\mu)\varphi(\mu)\, d\mu, \\ y &= \int \mathrm{A}(\lambda) g(\lambda)\, d\lambda + \int \mathrm{B}(\mu)\psi(\mu)\, d\mu, \\ z &= \int \mathrm{A}(\lambda) h(\lambda)\, d\lambda + \int \mathrm{B}(\mu)\chi(\mu)\, d\mu, \\ t &= \int \mathrm{A}(\lambda) k(\lambda)\, d\lambda + \int \mathrm{B}(\mu)\theta(\mu)\, d\mu. \end{aligned}$$

Interpréter géométriquement les formules obtenues de façon à trouver une définition géométrique de ces surfaces. Transformer par dualité les divers résultats obtenus.

41. Soit Σ la sphère de centre O et de rayon égal à un ; soit S une surface quelconque et S' sa polaire réciproque par rapport à Σ. Soit M un point quelconque de S et P le plan tangent en ce point ; soient M' et P' le point et le plan tangent de S' qui correspondent à P et M par polaires réciproques. On considère la congruence K des droites MM' et la congruence K' des intersections des plans P et P'. Montrer que leurs développables se correspondent, et que les développables de K découpent sur S et S' des réseaux conjugués. Comment les développables de K coupent-elles Σ? Chercher à déterminer S de manière que K soit une congruence de normales ; que peut-on dire alors des développables de K et de la surface S ?

42. Étant donnée une courbe gauche C, par un point fixe O on mène des segments OM équipollents aux diverses cordes de C. Le lieu des points M est une surface S_0. Par chaque point M de cette surface on mène la parallèle Δ à l'intersection des plans osculateurs de C menés aux points P et P_1 de C tels que PP_1 est équipollent à OM. Soient S_1 et S_2 les deux nappes de la surface focale de la congruence des droites Δ :

1°. déterminer S_1 et S_2, leur ds^2, leur $\sum l\, d^2x$. Montrer que les asymptotiques se correspondent sur S_1 et S_2. Quelles sont les courbes de S_0 qui leur correspondent ?

2°. Condition nécessaire et suffisante que doit remplir C pour que la congruence des droites Δ soit une congruence de normales. Trouver alors l'une des surfaces normales. Montrer que les rayons de courbure de Σ sont fonctions l'un de l'autre.

3°. En restant dans ce cas, rapporter le ds^2, de S_1 aux géodésiques tangentes aux droites Δ et à leurs trajectoires orthogonales. En conclure que S_1 est applicable sur un paraboloïde de révolution.

Nota. Les deux dernières parties de cet exercice se rattachent à la fin du chapitre XIII.

CHAPITRE IX.

COMPLEXES DE DROITES.

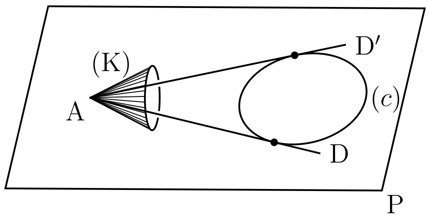
Éléments fondamentaux d'un complexe de droites.

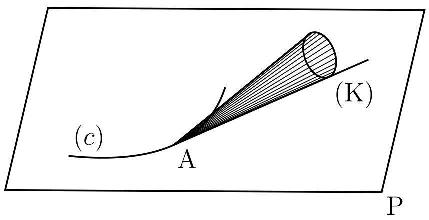
1. On appelle *complexe* un système de ∞^3 droites, c'est-à-dire une famille de droites dépendant de trois paramètres.

Soit A un point de l'espace, toutes les droites (D) du complexe qui passent par ce point sont au nombre de ∞^1, et constituent le *cône du complexe* attaché au point A : nous l'appellerons le cône (K).

Corrélativement : soit un plan P, toutes les droites (D) du complexe situées dans ce plan sont au nombre de ∞^1, et enveloppent une courbe (c) qui est la *courbe du complexe* associée à P. La tangente en tout point de cette courbe est une droite du complexe.

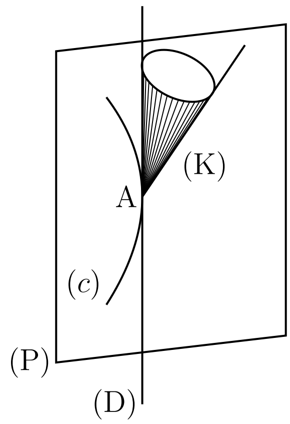
Plus généralement nous appellerons *courbe du complexe* une courbe (c) dont toutes les tangentes appartiennent au complexe. Considérons sur une telle courbe un point A, et le cône du complexe (K) associé au point A. Ce cône est tangent à la courbe (c). *Une courbe du complexe est tangente en chacun de ses points au cône du complexe associé à ce point.*





Considérons un plan P, et un point A de ce plan ; cherchons les droites du complexe situées dans le plan P et passant par A. Considérons le cône du complexe associé au point A, les droites cherchées sont les génératrices de ce cône situées dans le plan P : si nous considérons la courbe du complexe associée au plan P, les droites cherchées sont aussi les tangentes issues de A à cette courbe. Cherchons dans le plan P le lieu des points A tels que deux des droites du complexe situées dans le plan P et passant par A soient confondues ; les points A correspondants seront, d'après ce qui précède, tels que le cône du complexe correspondant soit tangent au plan P : ils doivent aussi être sur la courbe du complexe : les droites du complexe confondues coïncident avec la génératrice de contact du cône du complexe, ou avec la tangente à la courbe du complexe. Ainsi l'on peut définir la courbe du complexe située dans un plan comme étant le lieu des points de ce plan pour lesquels le cône du complexe est tangent au plan, et la génératrice de contact n'est autre que la tangente en ce point à la courbe. La courbe du complexe est ainsi définie par points et par tangentes.

Considérons alors une droite (D) du complexe ; prenons sur cette droite un point A, et considérons le cône (K) du complexe associé au point A ; soit P le plan tangent à ce cône le long de la génératrice (D). A chaque point A de la droite correspond ainsi un plan P. Considérons maintenant la courbe (c) du complexe située dans le plan P, elle est tangente à la droite (D) précisément au point A, de sorte qu'à chaque plan P passant par la droite correspond un point de cette droite. *Il y a une correspondance homographique entre les points et les plans d'une droite du complexe.*



Précisons la nature de cette homographie. Une droite quelconque peut être représentée par deux équations de la forme

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{X} = a\mathrm{Z} + f, \qquad \mathrm{Y} = b\mathrm{Z} + g.$$

Pour qu'elle appartienne à un complexe, il faut et il suffit qu'il existe une relation entre les paramètres a, b, f, g :

$$\text{(2)} \qquad \varphi(a, b, f, g) = 0.$$

Cherchons alors toutes les droites du complexe infiniment voisines de la droite (1) et rencontrant cette droite. Une telle droite peut être représentée par les équations

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{X} = (a + da)\mathrm{Z} + (f + df), \qquad \mathrm{Y} = (b + db)\mathrm{Z} + (g + dg).$$

Exprimons qu'elle rencontre la droite (1). Les équations

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{Z}\, da + df = 0, \qquad \mathrm{Z}\, db + dg = 0,$$

doivent avoir une solution commune en Z, ce qui donne la condition

$$\text{(5)} \qquad da\, dg - db\, df = 0.$$

Le point d'intersection M des deux droites infiniment voisines aura alors pour cote

$$\mathrm{Z} = -\frac{df}{da}.$$

Différentions la relation (2), nous avons

$$\text{(6)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial a}\, da + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\, db + \frac{\partial\varphi}{\partial f}\, df + \frac{\partial\varphi}{\partial g}\, dg = 0.$$

Supposons connu le point M, nous avons les relations (4) dans lesquelles Z est connu, et qui par conséquent déterminent les rapports des différentielles. Cherchons alors le plan passant par les deux droites infiniment voisines. Il suffit de multiplier (3) respectivement par db et $-da$, et d'ajouter, il vient, en tenant compte de (5)

$$\text{(7)} \qquad (\mathrm{X} - a\mathrm{Z} - f)\, db - (\mathrm{Y} - b\mathrm{Z} - g)\, da = 0.$$

Telle est l'équation du plan cherché : il ne dépend que du rapport $\frac{db}{da}$. Nous en concluons que *toutes les droites du complexe infiniment voisines de la droite* D *et rencontrant cette droite en un point* M *donné sont dans un même plan, et inversement toutes les droites du complexe infiniment voisines de la droite* D *et situées dans un même plan passant par* D *rencontrent* D *au même point.* Posons

$$\lambda = \frac{da}{db},$$

l'équation (7) s'écrit

$$X - aZ - f - \lambda(Y - bZ - g) = 0. \tag{8}$$

Démontrons qu'il y a une relation homographique entre λ, Z : tirons en effet df, dg des équations (4) et portons dans (6), nous avons

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a} - Z\frac{\partial\varphi}{\partial f}\right) da + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial b} - Z\frac{\partial\varphi}{\partial g}\right) db = 0$$

et la relation d'homographie est

$$\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a} - Z\frac{\partial\varphi}{\partial f}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial b} - Z\frac{\partial\varphi}{\partial g} = 0.$$

Considérons en particulier le cône du complexe de sommet M ; la génératrice infiniment voisine est une droite du complexe rencontrant D en M : le plan de ces deux droites est le plan tangent au cône du complexe, et nous avons l'homographie précédemment définie.

Considérons encore une courbe du complexe quelconque tangente à la droite D au point A. Considérons une tangente infiniment voisine à cette courbe ; à la limite cette tangente rencontre D au point A, et le plan de ces deux droites n'est autre que le plan osculateur à la courbe au point A, et ce plan osculateur est associé au point A dans l'homographie précédente. Donc *toutes les courbes du complexe tangentes à une droite* D *en un même point* A *ont même plan osculateur en ce point : c'est le plan tangent au cône du complexe associé au point* A.

Considérons enfin une congruence de droites appartenant au complexe ; prenons dans cette congruence une droite D, et sur cette droite un point focal A ; le point A appartient à une des nappes de la surface focale de la congruence ; il appartient aussi à l'arête de rebroussement d'une des développables de la congruence, et cette arête de rebroussement, enveloppe de droites D appartenant au complexe, est une courbe du complexe. Son plan osculateur en A est le deuxième plan focal de la congruence ; d'après ce qui précède, *toutes les congruences du complexe passant par la droite* D *et ayant un foyer en* A *ont même deuxième plan focal relatif à la droite* D *;* il y a correspondance homographique entre ce deuxième plan focal et le point A.

Surfaces du complexe.

2. Cherchons si dans un complexe il y a des congruences ayant une surface focale double. Sur une telle surface (Φ) les arêtes de rebroussement des développables sont des lignes asymptotiques ; or, ce sont des courbes du complexe. Il s'agit donc de trouver des surfaces telles qu'une famille de lignes asymptotiques soit formée de courbes du complexe. Considérons une telle asymptotique (c) et un de ses points A. Le plan osculateur à la courbe (c) en A est le plan tangent au cône (K) du complexe associé au point A, et ce plan osculateur est tangent à la surface (Φ). Les surfaces cherchées sont donc tangentes en chacun de leurs points au cône du complexe associé à ce point. Réciproquement soit (Φ) une

telle surface ; considérons en chacun de ses points la génératrice de contact (D) du cône du complexe avec le plan tangent. Nous déterminons ainsi sur la surface (Φ) une famille de courbes tangentes en chaque point aux droites (D) ; ces courbes (c) sont des courbes du complexe ; leur plan osculateur est le plan tangent au cône du complexe le long de la droite (D), c'est le plan tangent à la surface (Φ) et les courbes (c) sont des asymptotiques de cette surface. De telles surfaces sont appelées *surfaces du complexe*.

Considérons les équations d'une droite du complexe

$$x = az + f, \qquad y = bz + g, \tag{1}$$

a, b, f, g étant liés par l'équation

$$\varphi(a, b, f, g) = 0. \tag{2}$$

Transportons l'origine au point (x, y, z) et appelons $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ les nouvelles coordonnées. $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ sont alors les coefficients de direction d'une droite du complexe

$$a = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}, \qquad b = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}},$$

et l'équation du cône du complexe associé au point (x, y, z) est

$$\varphi\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}, \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}}, x - \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}z, y - \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}}z\right) = 0,$$

ou, en rendant homogène

$$\Psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, x\mathrm{Z} - z\mathrm{X}, y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}) = 0;$$

les courbes du complexe sont alors définies par l'équation différentielle, homogène en dx, dy, dz,

$$\Psi(dx\, dy\, dz, x\, dz - z\, dx, y\, dz - z\, dy) = 0.$$

Une telle équation s'appelle une *équation de Monge*, et *équation de Pfaff* si elle est du premier degré.

Prenons maintenant l'équation tangentielle du cône du complexe

$$\mathrm{F}(x, y, z, \mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}) = 0;$$

la condition pour qu'une surface $z = \mathrm{G}(x, y)$ soit tangente à ce cône en chacun de ses points, est que l'équation soit vérifiée par $\mathrm{U} = \dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x} = p$, $\mathrm{V} = \dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} = q$, $\mathrm{W} = -1$; les surfaces du complexe sont donc définies par l'équation aux dérivées partielles

$$\mathrm{F}(x, y, z, p, q, -1) = 0,$$

qui est de la forme :

$$f(x, y, z, p, q) = 0. \tag{3}$$

Nous obtenons une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Inversement, avec les notations précédentes, toute équation aux dérivées partielles du premier ordre pouvant se mettre sous la forme

$$f\left(x, y, z, -\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{W}}, -\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}}\right) = 0 \tag{4}$$

exprime que le plan tangent à une surface intégrale est tangent à un certain cône associé au point de contact, mais les génératrices de tous ces ∞^3 cônes remplissent en général tout l'espace, et ne forment un complexe qu'exceptionnellement.

Pour pouvoir mieux préciser ce cas d'exception, rappelons les points essentiels de la théorie des équations générales aux dérivées partielles du premier ordre, c'est-à-dire de la forme (3).

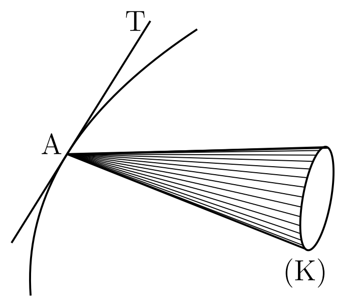
Un *élément de contact intégral* est un élément de contact dont les coordonnées (x, y, z, p, q) satisfont à l'équation donnée (3).

Le *cône élémentaire* associé au point (x, y, z) est l'enveloppe des éléments de contact intégraux appartenant à ce point son équation tangentielle est précisément l'équation (4). Tout élément linéaire formé d'un point et d'une génératrice du cône élémentaire associé à ce point s'appelle un *élément linéaire intégral.* Si dx, dy, dz sont les coefficients de direction d'une telle génératrice, l'équation qui caractérise les éléments linéaires intégraux s'obtient en éliminant p et q entre les équations :

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p}dy - \frac{\partial f}{\partial q}dx = 0. \tag{5}$$

L'équation obtenue est une équation de Monge :

$$\mathrm{G}(x, y, z, dx, dy, dz) = 0. \tag{6}$$



Les *courbes intégrales* sont les courbes dont tous les éléments linéaires (points-tangentes) sont intégraux. Elles sont définies par l'équation (6).

Une *bande intégrale* est un lieu d'éléments de contact appartenant à une même courbe (points-plans tangents), et qui soient tous des éléments de contact intégraux. C'est donc un ensemble de ∞^1 éléments de contact satisfaisant aux équations

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0. \tag{7}$$

Si on prend une courbe quelconque et si par chacune de ses tangentes on mène un plan tangent au cône élémentaire associé au point de contact, on obtient une bande intégrale. Par une courbe quelconque passent donc, si l'équation (3) est algébrique en p, q, un nombre limité de bandes intégrales. Ce nombre se réduit de un dans le cas où la courbe est une courbe intégrale.

Par une bande intégrale passe en général une surface intégrale et une seule. Les bandes intégrales qui font exception s'appellent *bandes caractéristiques.* Les courbes qui leur servent de supports sont des courbes intégrales particulières, qu'on appelle *caractéristiques.*

Les bandes caractéristiques sont définies par les équations

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\dfrac{\partial f}{\partial p} + q\dfrac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{-\dfrac{\partial f}{\partial x} - p\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dq}{-\dfrac{\partial f}{\partial y} - q\dfrac{\partial f}{\partial z}}. \tag{8}$$

On les obtient donc en intégrant un système d'équations différentielles ordinaires. *Par un élément de contact intégral passe une bande caractéristique et une seule.*

La surface intégrale qui passe par une bande intégrale non caractéristique donnée est engendrée par les bandes caractéristiques passant par les divers éléments de contact intégraux de cette bande intégrale.

Sur une surface intégrale il y a au plus une courbe intégrale qui ne soit pas une caractéristique.

Toute courbe intégrale est l'enveloppe d'une famille de ∞^1 courbes caractéristiques. Ces caractéristiques engendrent une surface intégrale.

Réciproquement : si une famille de ∞^1 caractéristiques a une enveloppe, cette enveloppe est une courbe intégrale.

L'intégration du système (8) suffit donc pour l'intégration de l'équation (3) et de l'équation de Monge (6), qui lui est associée.

Ces trois intégrations s'achèvent enfin immédiatement si on a une *intégrale complète*, c'est-à-dire une équation où figure deux constantes arbitraires

$$\mathrm{H}(x, y, z, a, b) = 0$$

définissant des surfaces intégrales, pour toutes les valeurs de ces constantes.

Les *courbes caractéristiques* sont alors définies par les équations

$$\mathrm{H} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial a} + c\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial b} = 0,$$

où c est une nouvelle constante arbitraire.

Une *surface intégrale quelconque* s'obtient en prenant l'enveloppe de ∞^1 surfaces, faisant partie de l'intégrale complète, c'est-à-dire en éliminant a entre les équations

$$\mathrm{H}(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial a}\, da + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial b}\, db = 0,$$

après y avoir remplacé b par une fonction arbitraire de a.

Les caractéristiques tracées sur une telle surface ont nécessairement une enveloppe ; par suite on obtient une *courbe intégrale quelconque*, en éliminant a entre les équations

$$\mathrm{H} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial a}\, da + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial b}\, db = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial a^2}\, da^2 + 2\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial a\, \partial b}\, da\, db + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial b^2}\, db^2 + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial b}\, d^2 b = 0,$$

après y avoir remplacé b par une fonction arbitraire de a.

Si nous revenons maintenant au cas particulier où l'équation (3) est celle qui définit les surfaces d'un complexe, nous voyons que les courbes intégrales sont les courbes du complexe, et que les caractéristiques situées sur une surface intégrale constituent la famille de ∞^1 courbes du complexe qui sont les lignes asymptotiques de cette surface. Il en résulte que les équations (8) ont alors pour conséquence

$$dp\,dx + dq\,dy = 0,$$

c'est-à-dire que l'équation (3) a elle-même pour conséquence

$$\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\,\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\,\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0.$$

On démontre que, réciproquement, les seules équations (3) pour lesquelles les caractéristiques sont les lignes asymptotiques des surfaces intégrales, sont, (si on excepte les équations linéaires), les équations dont les cônes élémentaires sont les cônes des complexes de droites.

Remarque. Si le cône du complexe se réduit à un plan, le complexe est appelé un *complexe linéaire*. Le cône n'a alors pas d'équation tangentielle, et la théorie précédente ne s'applique plus.

Le cas des complexes linéaires sera étudié dans le chapitre suivant.

Complexes spéciaux.

3. Nous dirons qu'un complexe est *spécial* quand l'homographie qui existe entre les points et les plans d'une droite du complexe est spéciale. A un élément d'un système correspond toujours le même élément dans le système associé, sauf pour un seul élément du premier système, dont le correspondant est indéterminé. L'équation de l'homographie étant

$$\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a} - z\,\frac{\partial\varphi}{\partial f}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial b} - z\,\frac{\partial\varphi}{\partial b} = 0,$$

la condition pour qu'on ait une homographie spéciale est

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}\,\frac{\partial\varphi}{\partial g} - \frac{\partial\varphi}{\partial b}\,\frac{\partial\varphi}{\partial f} = 0. \tag{1}$$

Considérons le *complexe des droites tangentes à une surface* ; considérons une congruence de ce complexe ; ces développables de l'une des familles de la congruence seront circonscrites à la surface, l'un des plans focaux sera indépendant de la congruence que l'on considère. Même résultat si on considère le *complexe des droites rencontrant une courbe donnée.* On obtient donc ainsi des complexes spéciaux. Nous allons montrer qu'il n'y en a pas d'autres. Prenons l'équation d'un complexe sous la forme

$$\Phi = g - \varphi(a, b, f) = 0;$$

(1) s'écrit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\,\frac{\partial\varphi}{\partial f} = 0. \tag{2}$$

Cette relation ne contient plus g, elle doit être une identité par rapport à a, b, f. Considérons une droite D du complexe, et les droites infiniment voisines qui la rencontrent ; on a la condition

$$da\,d\varphi - db\,df = 0,$$

ou

$$db\,df - da\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\,da + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\,db + \frac{\partial\varphi}{\partial f}\,df\right) = 0;$$

remplaçons $\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}$ par sa valeur tirée de (2), il vient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b}\,\frac{\partial\varphi}{\partial f}\,da^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial b}\,da\,db - \frac{\partial\varphi}{\partial f}\,da\,df + db\,df = 0,$$

ou

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\,da - df\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial f}\,da - db\right) = 0.$$

le point de rencontre de la droite D avec les droites infiniment voisines est

$$(4) \qquad z = -\frac{df}{da} = -\frac{\partial\varphi}{\partial b},$$

de sorte qu'à tout plan passant par D correspond toujours le même point F :

$$(5) \qquad x = az + f, \qquad y = bz + \varphi, \qquad z = -\frac{\partial\varphi}{\partial b}.$$

Différentions x, y

$$dx = a\,dz + z\,da + df, \qquad dy = b\,dz + z\,db + d\varphi,$$

d'où, en remplaçant z par sa valeur

$$dx - a\,dz = -\frac{\partial\varphi}{\partial b}\,da + df, \qquad dy - b\,dz = \frac{\partial\varphi}{\partial a}\,da + \frac{\partial\varphi}{\partial f}\,df;$$

d'où la relation

$$(6) \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial f}(dx - a\,dz) + dy - b\,dz = 0.$$

Les différentielles dx, dy, dz sont liées par une relation linéaire et homogène ; les fonctions x, y, z sont liées au moins par une relation.

Si on n'a qu'une relation, le lieu des points F est une surface, et (6) exprime que la droite D est tangente à cette surface. Si on a 2 relations, le lieu des points F est une courbe et la droite D rencontre cette courbe. Tels sont les 2 seuls cas possibles pour les complexes spéciaux.

Remarques. 1. Dans l'équation (3) nous avons jusqu'à présent considéré le seul facteur $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial b}\,da - df\right)$. Annulant l'autre facteur

$$\frac{db}{da} = \frac{\partial\varphi}{\partial f},$$

nous aurions alors des droites du complexe qui seraient toutes situées dans un même plan avec D, ce plan serait le plan singulier de l'homographie, et précisément le plan tangent à la surface lieu des points F. On voit ainsi qu'en prenant l'un ou l'autre des facteurs, on définit la même surface par points et par plans tangents.

2. Si l'équation du complexe ne contient ni f ni g, on a une relation entre les coefficients de direction de la droite D, on a le complexe des droites rencontrant une même courbe à l'infini.

3. Le calcul précédent peut s'interpréter dans le cas d'un complexe quelconque. L'équation (1), qui n'est plus alors conséquence de l'équation du complexe, jointe à cette équation du complexe, définit une congruence des droites du complexe sur lesquelles l'homographie est spéciale. Ce sont les *droites singulières* du complexe. Alors *toutes les surfaces réglées du complexe passant par une droite singulière ont même plan tangent au point* F *de cette droite défini précédemment*, ce plan tangent étant parallèle au plan

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial f}(x - az) + y - bz = 0.$$

Si le lieu des points singuliers est une surface, (6) montre que cette surface est aussi l'enveloppe des plans singuliers, et les droites singulières lui sont tangentes. *La surface des singularités est une des nappes de la surface focale de la congruence des droites singulières, les points et les plans singuliers sont des éléments focaux de cette congruence non associés entre eux. Si le lieu des points singuliers est une courbe, les plans singuliers sont* (*d'après* (6)) *tangents à cette courbe, qui est une courbe focale de la congruence des droites singulières.*

4. Considérons en particulier le cas des *complexes du deuxième degré*. En un point quelconque, le plan associé est tangent au cône du complexe ; il est unique et bien déterminé. Il ne peut y avoir indétermination que si le cône du complexe associé à ce point se décompose. *La surface des singularités est donc le lieu des points où le cône du complexe se décompose ; c'est aussi l'enveloppe des plans pour lesquels la courbe du complexe se décompose*, comme le verrait par un raisonnement analogue.

Surfaces et courbes des complexes spéciaux.

Revenons aux complexes spéciaux : considérons d'abord le cas du complexe des tangentes à une surface (Φ). Les cônes du complexe sont les cônes circonscrits à cette surface. Les plans tangents à (Φ) constituent une intégrale complète. Une intégrale quelconque est donc l'enveloppe de ∞^1 plans tangents à (Φ), c'est-à-dire une développable quelconque circonscrite à (Φ). Les caractéristiques, qui sont en général les courbes de contact de la surface intégrale avec les surfaces, faisant partie de l'intégrale complète, qu'elle enveloppe, sont les génératrices rectilignes de ces développables, c'est-à-dire les droites même du complexe. Enfin on obtiendra les courbes intégrales en prenant l'enveloppe des caractéristiques sur les surfaces intégrales ; ce sont précisément les arêtes de rebroussement des développables qui sont les courbes du complexe.

Considérons maintenant le complexe des droites rencontrant une courbe ; on voit de même que les surfaces du complexe sont les développables passant par la courbe, les caractéristiques sont les droites du complexe, et les courbes du complexe sont les arêtes de rebroussement.

Dans les complexes spéciaux, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont dépend la recherche des surfaces du complexe a pour caractéristiques les droites du complexe. Réciproquement toute équation aux dérivées partielles du premier ordre dont les caractéristiques sont des droites est associée à un complexe spécial.

Soit en effet l'équation aux dérivées partielles

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

dont les caractéristiques sont des droites. On obtient les surfaces intégrales en prenant une courbe intégrale et en menant les caractéristiques tangentes : donc les surfaces intégrales sont des développables, et le plan tangent est le même le long de chaque caractéristique, c'est-à-dire que $dp = 0$, $dq = 0$ doivent être conséquences de l'équation des caractéristiques, ce qui revient à dire que $f = 0$ doit entraîner comme conséquence les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\,\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + q\,\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Supposons alors que z figure dans l'équation aux dérivées partielles et posons

$$f = z - \Phi(x, y, p, q);$$

les conditions précédentes s'écriront

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - p = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} - q = 0,$$

d'où il résulte que Φ est de la forme

$$\Phi = px + qy + \Psi(p, q),$$

et l'équation aux dérivées partielles est

$$z - px - qy = \Psi(p, q).$$

Le plan tangent à une quelconque des surfaces intégrales est donc

$$p\mathrm{X} + q\mathrm{Y} - \mathrm{Z} + \Psi(p, q) = 0.$$

L'ensemble de tous ces plans a donc une enveloppe, surface ou courbe. Le cône élémentaire associé à un point quelconque est le cône circonscrit à cette surface ou à cette courbe, et l'équation aux dérivées partielles est bien associée à un complexe spécial.

Remarque. Nous avons dû supposer que z figurait dans l'équation aux dérivées partielles ; s'il n'en est pas ainsi, cette équation s'écrit

$$\Phi(x, y, p, q) = 0$$

et les conditions obtenues plus haut s'écrivent

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0;$$

Φ doit être indépendant de x, y, et l'équation aux dérivées partielles prend la forme

$$\Phi(p, q) = 0.$$

On a alors le complexe des droites rencontrant une courbe à l'infini.

Considérons par exemple l'équation

$$1 + p^2 + q^2 = 0$$

elle définit le *complexe des droites isotropes* ; les courbes du complexe sont les courbes minima, et on les obtient sans intégration comme arêtes de rebroussement des développables isotropes.

Surfaces normales aux droites du complexe.

4. Proposons-nous maintenant de chercher les *surfaces dont les normales appartiennent au complexe* défini par l'équation

$$\Phi(a, b, f, g) = 0.$$

Une normale à une surface du complexe est définie par les équations

$$\frac{\mathrm{X} - x}{p} = \frac{\mathrm{Y} - y}{q} = -(\mathrm{Z} - z)$$

ou

$$\mathrm{X} = -p\mathrm{Z} + x + pz, \qquad \mathrm{Y} = -q\mathrm{Z} + y + qz;$$

de sorte que les surfaces cherchées sont définies par l'équation aux dérivées partielles

$$\Phi(-p, -q, x + pz, y + qz) = 0.$$

Si une surface répond à la question, il est évident que toutes les surfaces parallèles répondent aussi à la question. Si le complexe est spécial, le problème revient à la recherche d'une congruence de normales, connaissant une des multiplicités focales. Pour le cas d'un complexe quelconque, nous allons chercher les congruences de normales appartenant au complexe : on obtiendra ensuite les surfaces au moyen d'une quadrature. Pour que ∞^2 droites :

$$\frac{x - f}{a} = \frac{y - g}{b} = \frac{z - 0}{1}$$

soient les normales d'une même surface, la condition est, en posant

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \qquad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},$$

que $\alpha\, df + \beta\, dg$ soit une différentielle exacte. Or, l'équation du complexe, résolue par rapport à β peut s'écrire

$$\beta = \varphi(\alpha, f, g),$$

et $\alpha\, df + \varphi(\alpha, f, g)\, dg$ doit être une différentielle exacte par rapport à deux variables indépendantes. Déterminons α par exemple en fonction de f, g, nous aurons la condition

$$\frac{\partial\alpha}{\partial g} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial f} + \frac{\partial\varphi}{\partial f}.$$

Cherchons une solution de la forme

$$\mathrm{F}(\alpha, f, g) = \text{const.},$$

nous avons, pour déterminer F,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial f} + \frac{\partial\alpha}{\partial f}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial g} + \frac{\partial\alpha}{\partial g}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\alpha} = 0.$$

On est ramené à l'équation

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial g} - \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial f} + \frac{\partial\varphi}{\partial f}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\alpha} = 0,$$

qui se ramène au système d'équations différentielles ordinaires

$$dg = \frac{-df}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}} = \frac{d\alpha}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial f}}.$$

Remarquons encore que *les développées des surfaces cherchées sont les surfaces pour lesquelles* ∞^1 *géodésiques sont des courbes du complexe.* Ce sont les surfaces focales des congruences considérées.

EXERCICES.

43. On considère deux plans rectangulaires, et toutes les droites telles que le segment intercepté sur chacune d'elles par les plans précédents ait une longueur constante. Trouver les congruences de normales du complexe de ces droites.

44. On considère trois plans formant un trièdre trirectangle et les droites telles que le rapport des segments déterminés par ces trois plans sur chacune d'elles soit constant. Trouver les surfaces dont les normales appartiennent au complexe de ces droites. Il y a parmi ces surfaces une infinité de surfaces du deuxième ordre admettant les trois plans donnés comme plans de symétrie. Le complexe précédent est celui des normales à une famille de quadriques homofocales, ou homothétiques par rapport à leur centre.

CHAPITRE X.

COMPLEXES LINÉAIRES.

Généralités sur les complexes algébriques.

1. Soit une droite

$$x = az + f, \qquad y = bz + g; \tag{1}$$

un *complexe algébrique* sera défini par une relation algébrique entre a, b, f, g :

$$\Phi(a, b, f, g) = 0.$$

Si on considère les droites du complexe passant par un point A, et situées dans un plan P passant par ce point, ce sont les génératrices d'intersection du plan P avec le cône du complexe associé au point A, ou bien les tangentes issues de A à la courbe du complexe située dans le plan P ; si le complexe est algébrique, le cône et la courbe sont algébriques, et on voit que *le degré du cône du complexe est égal à l'ordre de la courbe plane du complexe* ; leur valeur commune s'appelle le *degré du complexe*, c'est le nombre de droites du complexe situées dans un plan et passant par un point de ce plan.

Si ce nombre est égal à 1, on a ce qu'on appelle un *complexe linéaire* ; le cône du complexe associé au point A est un plan qu'on appelle *plan focal* ou *plan polaire* du point A. La courbe du complexe située dans un plan P se réduit à un point, qu'on appelle *foyer* ou *pôle* du plan P ; si le plan P est le plan polaire du point A, le point A est le pôle du plan P ; *il y a réciprocité entre un pôle et son plan polaire.*

Coordonnées homogènes.

2. Pour l'étude des complexes algébriques il y a avantage à remplacer a, b, f, g par les coordonnées homogènes de droites.

Coordonnées de Plücker. Considérons les équations d'une droite en coordonnées cartésiennes

$$\frac{\mathrm{X} - f}{a} = \frac{\mathrm{Y} - g}{b} = \frac{\mathrm{Z} - h}{c}, \tag{2}$$

équations qui contiennent comme cas particulier les équations (1). Nous prendrons pour coordonnées pluckériennes de la droite les six quantités

$$a, \quad b, \quad c, \qquad p = gc - hb, \qquad q = ha - fc, \qquad r = fb - ga.$$

Ces six coordonnées sont, comme on le voit immédiatement, liées par la relation homogène

$$pa + qb + rc = 0. \tag{3}$$

Ces six paramètres liés par une relation homogène se réduisent à quatre en réalité ; a, b, c sont les projections sur les axes d'un certain segment porté par la droite ; p, q, r sont les moments de ce segment par rapport aux axes (en coordonnées rectangulaires).

Voyons ce que devient l'équation du complexe. De (2) on tire

$$\mathrm{X} = \frac{a}{c}\,\mathrm{Z} - \frac{q}{c}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{b}{c}\,\mathrm{Z} + \frac{p}{c},$$

et l'équation

$$\Phi(a, b, f, g) = 0$$

devient

$$\Phi\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, -\frac{q}{c}, \frac{p}{c}\right) = 0.$$

Cette équation peut être rendue homogène, et prend la forme

$$\Psi(a, b, c, p, q) = 0$$

on peut y introduire r en vertu de l'équation (3), et on obtient finalement, pour définir le complexe, une équation homogène entre les coordonnées pluckériennes :

$$\chi(a, b, c, p, q, r) = 0.$$

Réciproquement, toute équation de la forme précédente peut être ramenée à la forme

$$\Psi\left(a, b, c, p, -q, -\frac{pa + qb}{c}\right) = 0,$$

et par suite à la forme primitive de l'équation du complexe.

Cherchons le *cône du complexe* de sommet (x, y, z). Nous avons, $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ étant les coordonnées courantes,

$$a = \mathrm{X} - x, \qquad b = \mathrm{Y} - y, \qquad c = \mathrm{Z} - z,$$

ou encore

$$p = y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}, \qquad q = z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}, \qquad r = x\mathrm{Y} - y\mathrm{X};$$

l'équation du cône du complexe s'obtiendra en remplaçant a, b, c, p, q, r par les valeurs précédentes dans l'équation du complexe. C'est donc :

$$\chi(\mathrm{X} - x, \mathrm{Y} - y, \mathrm{Z} - z, y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}, z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}, x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) = 0.$$

Si on veut une *courbe du complexe*, on prendra

$$\begin{aligned} &a = dx, && b = dy, && c = dz, \\ &p = y\,dz - z\,dy, && q = z\,dx - x\,dz, && r = x\,dy - y\,dx, \end{aligned}$$

et on a l'équation différentielle des courbes du complexe

$$\chi(dx, dy, dz, y\,dz - z\,dy, z\,dx - x\,dz, x\,dy - y\,dx) = 0.$$

La condition pour qu'un complexe soit spécial est

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}\,\frac{\partial\Phi}{\partial g} - \frac{\partial\Phi}{\partial b}\,\frac{\partial\Phi}{\partial f} = 0;$$

elle devient ici

$$\frac{\partial\chi}{\partial a}\,\frac{\partial\chi}{\partial p} + \frac{\partial\chi}{\partial b}\,\frac{\partial\chi}{\partial q} + \frac{\partial\chi}{\partial c}\,\frac{\partial\chi}{\partial r} = 0;$$

dans le cas d'un complexe algébrique quelconque, cette équation, jointe à celle du complexe définit *la congruence des droites singulières.*

Reprenons l'homographie entre droites et plans d'une droite du complexe ; les coefficients de cette homographie sont $\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial b}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial f}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial g}$, et par suite en coordonnées homogènes, ce sont $\dfrac{\partial\chi}{\partial a}, \dots, \dfrac{\partial\chi}{\partial r}$. Considérons la droite $(a_0, b_0, c_0, p_0, q_0, r_0)$. L'équation

$$\sum a\,\frac{\partial\chi}{\partial a_0} + \sum p\,\frac{\partial\chi}{\partial p_0} = 0$$

définit un complexe linéaire contenant la droite considérée, et sur cette droite, l'homographie pour ce complexe linéaire est précisément la même que pour le complexe primitif. Ce complexe linéaire est dit *tangent* au complexe donné.

Remarques. Si nous définissons la droite par deux points (x, y, z) et (x', y', z') nous avons

$$\begin{aligned} a &= x' - x, & b &= y' - y, & c &= z' - z,\\ p &= yz' - zy', & q &= zx' - xz', & r &= xy' - yx'; \end{aligned}$$

d'où l'équation du cône du complexe

$$\chi(x' - x, y' - y, z' - z, yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx') = 0;$$

Corrélativement, définissons la droite par deux plans (u, v, w, s), (u', v', w', s'). On trouve facilement

$$\begin{aligned} a &= vw' - wv', & b &= wu' - uw', & c &= uv' - vu',\\ p &= su' - us', & q &= sv' - vs', & r &= sw' - ws'; \end{aligned}$$

on obtient alors l'équation tangentielle d'une courbe plane du complexe

$$\chi(vw' - wv', \dots, su' - us', \dots) = 0,$$

et on voit bien ainsi que la classe de cette courbe est égale à l'ordre du cône du complexe.

Coordonnées générales de Grassmann et Klein. Plus généralement prenons un tétraèdre de référence quelconque, et soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées d'un point ; u_1, u_2, u_3, u_4 les coordonnées d'un plan. Considérons la droite comme définie par deux points $(x), (y)$. Nous prendrons comme coordonnées de cette droite les quantités

$$p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4);$$

remarquons que l'on a $p_{ii} = 0$ et $p_{ki} = -p_{ik}$, de sorte que l'on n'obtient ainsi que six coordonnées $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$. Ce sont les moments par rapport au segment des deux points $(x), (y)$ des segments égaux à 1 pris sur les six arêtes du tétraèdre, ou du moins des quantités proportionnelles à ces moments.

Si on a deux droites (p_{ik}) et (p'_{ik}), leur moment relatif M est donné par la formule

$$\rho \mathrm{M} = \sum p_{ik} p'_{hl}.$$

Si ce moment est nul, les deux droites se rencontrent. Or, considérons le déterminant

$$\Theta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Développons d'après la règle de Laplace, nous avons

$$\Theta = 2(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}) = 2\Phi(p_{ik}) = 0;$$

de sorte que la condition de rencontre des deux droites est

$$\sum p'_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{ik}} = 0.$$

Si nous définissons la droite par deux plans $(u), (v)$, nous prendrons pour coordonnées

$$q_{ik} = \begin{vmatrix} u_i & u_k \\ v_i & v_k \end{vmatrix}.$$

Cherchons les relations entre les p, q. La droite étant l'intersection des plans $(u), (v)$, un point de cette droite sera l'intersection des plans $(u), (v), (w)$. On aura donc

$$\begin{cases} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 = 0, \\ w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4x_4 = 0. \end{cases}$$

Considérons le déterminant

$$\Omega = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix};$$

la coordonnée x_i est égale au coefficient S_i de s_i. Pour avoir un deuxième point de la droite, nous le définirons par les trois plans $(u), (v), (s)$, et alors $y_i = \mathrm{W}_i$. Considérons l'adjoint de Ω

$$\begin{vmatrix} \mathrm{U}_1 & \mathrm{U}_2 & \mathrm{U}_3 & \mathrm{U}_4 \\ \mathrm{V}_1 & \mathrm{V}_2 & \mathrm{V}_3 & \mathrm{V}_4 \\ \mathrm{W}_1 & \mathrm{W}_2 & \mathrm{W}_3 & \mathrm{W}_4 \\ \mathrm{S}_1 & \mathrm{S}_2 & \mathrm{S}_3 & \mathrm{S}_4 \end{vmatrix},$$

nous avons, en associant à chaque mineur du deuxième ordre de Ω le mineur complémentaire de l'adjoint

$$p_{ik} = \Omega \frac{\partial\Phi}{\partial q_{ik}};$$

on peut prendre Ω comme arbitraire, et écrire

$$p_{ik} = \frac{\partial\Phi}{\partial q_{ik}}.$$

et de même

$$q_{ik} = \frac{\partial\Phi}{\partial p_{ik}}.$$

L'équation du complexe sera alors $\mathrm{F}(p_{ik}) = 0$ ou $\mathrm{F}(q_{hl}) = 0$, d'où les équations du cône ou de la courbe du complexe. La condition pour que le complexe soit spécial est

$$\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial p_{12}}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial p_{34}} + \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial p_{13}}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial p_{24}} + \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial p_{14}}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial p_{23}} = 0.$$

Complexe linéaire.

3. Étudions plus spécialement le complexe linéaire. Son équation s'écrit

$$\sum \mathrm{A}_{hl} p_{ik} = 0;$$

le complexe est spécial s'il satisfait à la relation

$$\mathrm{A}_{12}\mathrm{A}_{34} + \mathrm{A}_{13}\mathrm{A}_{42} + \mathrm{A}_{14}\mathrm{A}_{23} = 0,$$

et cette équation exprime que les A sont les coordonnées d'une droite ; l'équation du complexe exprime que toute droite du complexe rencontre cette droite. *Un complexe linéaire spécial est constitué par les droites rencontrant une droite fixe*, qu'on appelle *directrice du complexe.*

Si on a une droite du complexe, un point A de cette droite et son plan polaire P, le cône du complexe se réduisant ici au plan P, l'homographie du complexe est celle des plans de la droite D associés à leurs pôles.

Faisceau de complexes.

4. Soient deux complexes linéaires

$$\sum \mathrm{A}_{hl} p_{ik} = 0, \qquad \sum \mathrm{B}_{hl} p_{ik} = 0;$$

l'équation

$$\sum (\mathrm{A}_{hl} + \lambda \mathrm{B}_{hl}) p_{ik} = 0$$

représentera un *faisceau de complexes.* Cherchons dans ce faisceau les complexes spéciaux. Ils sont définis par l'équation

$$\begin{aligned} &(\mathrm{A}_{14} + \lambda\mathrm{B}_{14})(\mathrm{A}_{23} + \lambda\mathrm{B}_{23}) \\ &+ (\mathrm{A}_{12} + \lambda\mathrm{B}_{12})(\mathrm{A}_{34} + \lambda\mathrm{B}_{34}) \\ &+ (\mathrm{A}_{13} + \lambda\mathrm{B}_{13})(\mathrm{A}_{24} + \lambda\mathrm{B}_{24}) = 0, \end{aligned}$$

équation du deuxième degré. *Dans un faisceau de complexes linéaires il y a donc deux complexes spéciaux.* Cherchons a quelles conditions il y a racine double. Supposons que $\lambda = 0$ soit racine, on a

$$\sum \mathrm{A}_{12}\mathrm{A}_{34} = 0,$$

et l'équation précédente se réduit à

$$\mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{34} + \mathrm{A}_{34}\mathrm{B}_{12} + \cdots + \lambda(\mathrm{B}_{12}\mathrm{B}_{34} + \dots) = 0.$$

Nous appellerons *invariant du complexe* la quantité

$$\Delta_{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_{12}\mathrm{A}_{34} + \mathrm{A}_{13}\mathrm{A}_{24} + \mathrm{A}_{14}\mathrm{A}_{23},$$

et *invariant relatif* la quantité

$$\Delta_{\mathrm{AB}} = \sum \mathrm{B}_{ik} \frac{\partial \Delta_{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{A}_{ik}};$$

l'équation devient alors

$$\Delta_{\mathrm{AB}} + \lambda \Delta_{\mathrm{B}} = 0;$$

pour que $\lambda = 0$ soit racine double, il faut que $\Delta_{\mathrm{AB}} = 0$. Or, les A_{ik} sont des coordonnées de droite, la condition $\Delta_{\mathrm{AB}} = 0$ exprime que cette droite appartient au deuxième complexe qui définit le faisceau. Elle appartient évidemment au premier. Donc *pour que l'un des complexes spéciaux soit double, il faut et il suffit que sa directrice appartienne à tous les complexes du faisceau*. Pour que l'équation se réduise à une identité, c'est-à-dire pour que tous les complexes du faisceau soient spéciaux, il faut encore que $\Delta_{\mathrm{B}} = 0$; il faut donc que les deux complexes soient spéciaux, et que leurs directrices se rencontrent.

Nous appellerons *congruence linéaire* l'ensemble des droites communes à deux complexes linéaires. Par tout point de l'espace passe une droite de cette congruence, et dans tout plan il y a une droite. Considérons le faisceau déterminé par les deux complexes qui définissent la congruence. Si ce faisceau a deux complexes spéciaux distincts, toutes les droites de la congruence appartiennent à ces complexes spéciaux, et par suite rencontrent deux directrices fixes. *Une congruence linéaire est formée en général des droites rencontrant deux directrices fixes.* Si les complexes spéciaux sont confondus, soit Δ leur directrice commune ; considérons un complexe quelconque (c) du faisceau. Δ est une droite du complexe (c) ; à chaque point A de Δ correspond son plan polaire par rapport au complexe (c) ; les droites de la congruence passant par A et appartenant au complexe (c) sont dans ce plan polaire. Or, les points de Δ ont même plan polaire par rapport à tous les complexes du faisceau. Les droites de la congruence rencontrent la droite Δ, et pour chaque point de cette droite sont situées dans le plan polaire correspondant.

Complexes en involution.

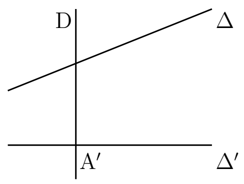
5. Reprenons le faisceau de complexes précédent. Les deux complexes de base sont dits *en involution* si on a $\Delta_{\mathrm{AB}} = 0$. Considérons une droite D commune

aux deux complexes. A un point A de cette droite correspond son plan polaire dans chacun des complexes, soient P, Q ces plans ; il en résulte une correspondance homographique entre les plans P, Q de la droite. De même, en partant d'un plan de la droite, on verrait qu'il existe une homographie entre les points de la droite. Cherchons les plans doubles de cette homographie. Considérons une des directrices Δ de la congruence linéaire définie par les deux complexes, et le plan $D\Delta$; le pôle de ce plan est l'intersection A' de D avec la deuxième directrice Δ', car toutes les droites passant par A' et rencontrant Δ appartiennent à la congruence, et par suite aux deux complexes. Ainsi A' est foyer du plan $D\Delta$; il est aussi évidemment foyer du plan $D\Delta'$; et l'on voit facilement que ces deux plans sont les plans doubles cherchés. Maintenant pour que l'homographie entre les plans P, Q soit une involution, il faut que les plans P, Q soient conjugués par rapport à ces plans doubles. L'équation du plan polaire d'un point par rapport à un complexe quelconque du faisceau est

$$\sum(A_{hl} + \lambda B_{hl}) \begin{vmatrix} X_i & X_k \\ x_i & x_k \end{vmatrix} = 0,$$

équation de la forme

$$P + \lambda Q = 0.$$



Considérons alors quatre complexes quelconques du faisceau, le rapport anharmonique des quatre plans polaires d'un même point dans ces quatre complexes est égal au rapport anharmonique des quatre quantités λ correspondantes. Or, prenons en particulier les deux complexes de base et les complexes spéciaux. Les valeurs de correspondantes sont $0, \infty$, et les racines de l'équation

$$\sum(A_{14} + \lambda B_{14})(A_{23} + \lambda B_{23}) = 0;$$

et la condition pour que les deux premières soient conjuguées harmoniques par rapport aux deux autres est

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

ou $\Delta_{AB} = 0$. *Ainsi donc si deux complexes sont en involution, les plans polaires d'un point dans ces deux complexes sont conjugués harmoniques par rapport aux plans passant par ce point et par les directrices de la congruence commune aux deux complexes. Et réciproquement.*

Application. On peut généraliser encore les coordonnées de droites. Reprenons la relation fondamentale

$$ap + bq + cr = 0;$$

elle est homogène et du deuxième degré. Or, il existe un type remarquable d'équations du deuxième degré, celui où ne figurent que les carrés. Posons

$$\begin{aligned} a + ip &= t_1, & b + iq &= t_3, & c + ir &= t_5, \\ a - ip &= it_2, & b - iq &= it_4, & c - ir &= it_6; \end{aligned}$$

la condition précédente devient

$$t_1^2 + t_3^2 + t_5^2 + t_2^2 + t_4^2 + t_6^2 = 0.$$

On introduit comme coordonnées homogènes les t, qui sont des fonctions linéaires homogènes des coordonnées pluckériennes. En égalant ces six coordonnées à 0, on a les équations de six complexes qui sont deux à deux en involution, car on voit facilement que la condition pour que les deux complexes

$$\sum \mathrm{A}_i t_i = 0, \qquad \sum \mathrm{B}_i t_i = 0,$$

soient en involution est

$$\sum \mathrm{A}_i \mathrm{B}_i = 0.$$

Droites conjuguées.

6. Considérons un complexe (c) et une droite Δ n'appartenant pas à ce complexe. Considérons la congruence commune à (c) et au complexe spécial de directrice Δ. Cette congruence a une deuxième directrice Δ' qui est dite la *droite conjuguée* de Δ. Il y a évidemment réciprocité entre ces deux droites. *Toutes les droites du complexe* (c) *qui rencontrent la droite* Δ *rencontrent sa conjuguée* Δ', puisque ce sont des droites de la congruence, et inversement *toute droite rencontrant à la fois les deux droites conjuguées* Δ, Δ' *appartient à la congruence et par suite au complexe.* Si on considère un point A de Δ, son plan polaire passe par Δ', puisque toutes les droites passant par A et rencontrant Δ' appartiennent au complexe. Δ' *est donc l'enveloppe des plans polaires des points de sa conjuguée* Δ. On voit de même *que* Δ' *est le lieu des pôles des plans passant par sa conjuguée* Δ. Si la droite Δ appartient au complexe (c), la congruence précédente a ses deux directrices confondues. *Les droites du complexe sont à elles-mêmes leurs conjuguées.*

Supposons l'équation du complexe

$$\mathrm{F}(a, b, c, p, q, r) = \mathrm{P}a + \mathrm{Q}b + \mathrm{R}c + \mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}r = 0.$$

Cherchons les coordonnées (a', b', c', p', q', r') de la conjuguée d'une droite (a, b, c, p, q, r). Il suffit d'exprimer que le complexe donné, et les complexes spéciaux ayant pour directrices les droites (a, b, c, p, q, r), (a', b', c', p', q', r') appartiennent à un même faisceau, ce qui donne

$$\mathrm{P} + \lambda p + \lambda' p' = 0, \quad \text{et les analogues} \ldots.$$

Multiplions respectivement par a, b, c, p, q, r et ajoutons membre à membre, le coefficient de λ disparaît et nous avons

$$\mathrm{F}(a, b, c, p, q, r) + \lambda' \sum (ap' + pa') = 0;$$

posons pour abréger

$$\sum (ap' + pa') = \sigma,$$

nous avons

$$F(a,b,c,p,q,r) + \lambda'\sigma = 0. \tag{1}$$

Si nous multiplions par a', b', c', p', q', r' et si nous ajoutons, c'est le coefficient de λ' qui disparaîtra et nous aurons

$$F(a',b',c',p',q',r') + \lambda\sigma = 0. \tag{2}$$

Enfin si nous multiplions par A, B, C, P, Q, R, nous obtenons, en posant

$$\Delta = AP + BQ + CR,$$
$$2\Delta + \lambda F(a,b,c,p,q,r) + \lambda' F(a',b',c',p',q',r') = 0,$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte de (1), (2)

$$\Delta = \lambda\lambda'\sigma,$$

d'où

$$\lambda = \frac{\Delta}{\lambda'\sigma} = -\frac{\Delta}{F(a,b,c,p,q,r)};$$

et nous pouvons prendre pour coordonnées de la droite conjuguée

$$a = A - \frac{\Delta}{F(a,\dots)}\,a, \quad \text{et les analogues},\dots$$

ou

$$a' = AF(a,b,c,p,q,r) - \Delta a, \quad \text{et les analogues},\dots.$$

Supposons qu'on prenne deux droites conjuguées pour arêtes opposées du tétraèdre de référence. Si nous appelons x, y, z, t les coordonnées tétraédriques, nous aurons

$$\begin{array}{lll} a = xt' - tx', & b = yt' - ty', & c = zt' - tz', \\ p = yz' - zy', & q = zx' - xz', & r = xy' - yx'. \end{array}$$

Supposons qu'on prenne pour droites conjuguées les droites $(x = 0, y = 0)$ et $(z = 0, t = 0)$. Leurs coordonnées sont

$$\begin{array}{llllll} a = 0, & b = 0, & c, & p = 0, & q = 0, & r = 0; \\ a' = 0, & b' = 0, & c' = 0, & p' = 0, & q' = 0, & r'. \end{array}$$

Exprimons que ces droites sont conjuguées. D'après les conditions trouvées précédemment, nous avons

$$\begin{array}{lll} 0 = AF(a,\dots), & 0 = BF(a,\dots), & 0 = CF - \Delta c, \\ 0 = PF, & 0 = QF, & r' = RF. \end{array}$$

Or,

$$F(a,b,c,p,q,r) = F(0,0,c,0,0,0) = Rc;$$

il en résulte que $\mathrm{A} = 0, \mathrm{B} = 0, \mathrm{P} = 0, \mathrm{Q} = 0$. Alors

$$\Delta = \mathrm{RC},$$

et l'équation du complexe devient

$$\mathrm{C}r + \mathrm{R}c = 0,$$

ou

$$r = kc.$$

En particulier cherchons à effectuer cette réduction en axes cartésiens. Nous supposerons que Δ soit l'axe Oz et que Δ' soit rejetée à l'infini dans le plan des x, y. Il faut d'abord montrer qu'il y a des droites dont la conjuguée peut être rejetée à l'infini. Pour qu'une droite (a, b, c, p, q, r) soit à l'infini, il faut que $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; et d'après les formules précédemment trouvées, nous avons pour les conjuguées de ces droites

$$\frac{a'}{\mathrm{A}} = \frac{b'}{\mathrm{B}} = \frac{c'}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{F}(0, 0, 0, p, q, r)}{\Delta};$$

a', b', c' sont donc proportionnels à des quantités fixes. *Les conjuguées des droites de l'infini sont parallèles à une même direction. Ces droites sont les lieux des pôles des plans parallèles à un plan fixe.* On les appelle *diamètres.* En rapportant donc un complexe à un diamètre et au plan conjugué, on peut mettre l'équation du complexe sous la forme

$$r = kc.$$

On peut obtenir cette réduction en axes rectangulaires. Il existe en effet une infinité de droites perpendiculaires à leurs conjuguées. Elles sont définies par la relation

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$

ou

$$(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c)\mathrm{F}(a, b, c, p, q, r) - \Delta(a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

Ces droites constituent donc un complexe du deuxième degré. Prenons un diamètre quelconque (a, b, c, p, q, r). Le plan conjugué, passant par l'origine a pour équation

$$p'\mathrm{X} + q'\mathrm{Y} + r'\mathrm{Z} = 0;$$

la condition pour qu'il soit perpendiculaire au diamètre est

$$\frac{a}{p'} = \frac{b}{q'} = \frac{c}{r'},$$

ou

$$\frac{a}{\mathrm{PF} - \Delta p} = \frac{b}{\mathrm{QF} - \Delta q} = \frac{c}{\mathrm{RF} - \Delta r};$$

la droite conjuguée du diamètre étant à l'infini, on peut remplacer a, b, c par $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$, ce qui donne

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{PF} - \Delta p} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{QF} - \Delta q} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{RF} - \Delta r}.$$

On a

$$ap + bq + cr = 0,$$

donc ici

$$\mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}r = 0;$$

et

$$\mathrm{F}(a, b, c, p, q, r) = \mathrm{P}a + \mathrm{Q}b + \mathrm{R}c.$$

Multiplions alors les deux termes des rapports précédents respectivement par $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et ajoutons, nous obtenons le rapport égal $\dfrac{\sum \mathrm{A}^2}{\Delta \mathrm{F}}$; nous pouvons alors prendre $a = \mathrm{A}$, $b = \mathrm{B}$, $c = \mathrm{C}$ et $\mathrm{F} = \Delta$, et enfin

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{P}\Delta - p\Delta} = \frac{\sum \mathrm{A}^2}{\Delta^2}, \quad \text{et les analogues,}$$

d'où

$$p = \mathrm{P} - \frac{\mathrm{A}\Delta}{\sum \mathrm{A}^2}, \qquad q = \mathrm{Q} - \frac{\mathrm{B}\Delta}{\sum \mathrm{B}^2}, \qquad r = \mathrm{R} - \frac{\mathrm{C}\Delta}{\sum \mathrm{C}^2}.$$

Nous obtenons ainsi un diamètre perpendiculaire au plan conjugué, c'est *l'axe du complexe* et on a l'équation réduite en coordonnées rectangulaires

$$r - mc = 0.$$

Le complexe ne dépend que d'un seul paramètre m par rapport au groupe des mouvements.

Si $r = 0$, $c = 0$, l'équation est satisfaite ; or, $r = 0$, $c = 0$ sont les coordonnées des droites rencontrant $\mathrm{O}z$ et perpendiculaire à $\mathrm{O}z$. *Le complexe contient toutes les droites rencontrant l'axe et perpendiculaires à l'axe* ; c, r sont des coordonnées qui ne changent pas si on fait tourner la droite autour de $\mathrm{O}z$; de même si on la déplace parallèlement à $\mathrm{O}z$. Autrement dit *un mouvement hélicoïdal d'axe* $\mathrm{O}z$ *laisse le complexe inaltéré. Il en résulte que si on a* ∞^1 *droites appartenant au complexe et ne dérivant pas les unes des autres par un mouvement hélicoïdal, on obtiendra toutes les droites du complexe en faisant subir à ce système de droites les translations et rotations précédentes.* Considérons les droites dont les coordonnées a, p sont nulles, et cherchons parmi ces droites celles qui appartiennent au complexe ; nous trouvons les droites

$$bx = mc, \qquad cy - bz = 0,$$

qui constituent une famille de génératrices du paraboloïde

$$xy - mz = 0.$$

Par conséquent, *pour obtenir toutes les droites d'un complexe, il suffit de prendre un système de génératrices d'un paraboloïde et de faire subir à chacune d'elles un des mouvements précédents.*

Réseau de complexes.

7. $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$, $\Phi'' = 0$ étant les équations de trois complexes linéaires, un *réseau de complexes* sera défini par l'équation

$$\lambda\Phi + \lambda'\Phi' + \lambda''\Phi'' = 0.$$

Considérons les droites communes à tous les complexes du réseau, c'est-à-dire communes aux trois complexes $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$, $\Phi'' = 0$; il y en a ∞^1 ; elles appartiennent aux complexes spéciaux du réseau, on peut les définir au moyen de trois de ces complexes spéciaux. Or, un complexe spécial est formé de toutes les droites rencontrant sa directrice ; les droites précédentes rencontrent donc trois droites fixes, elles constituent un système de génératrices d'une quadrique, le deuxième système de génératrices comprenant les directrices des complexes spéciaux du réseau.

Application. On peut définir un complexe par cinq droites n'appartenant pas à une même congruence linéaire. Soient en effet les droites $1, 2, 3, 4, 5$; donnons-nous un point P et cherchons-en le plan polaire ; considérons les droites $1, 2, 3, 4$; il existe deux droites Δ, Δ' qui rencontrent ces quatre droites, ces droites sont conjuguées par rapport au complexe, et alors la droite passant par P et s'appuyant sur Δ, Δ' appartient au complexe. De même en considérant les droites $2, 3, 4, 5$, nous aurons une deuxième droite passant par P et appartenant au complexe ; le plan polaire de P est alors déterminé par ces deux droites.

Courbes du complexe.

8. Proposons-nous de déterminer les courbes du complexe

$$r = kc.$$

Considérons une droite passant par un point (x, y, z) et de coefficients directeurs a, b, c ; pour qu'elle appartienne au complexe, il faut que l'on ait

$$bx - ay = kc,$$

et l'équation différentielle des courbes du complexe est alors

$$x\,dy - y\,dx = k\,dz. \tag{1}$$

Cette équation s'écrit

$$x^2\,d\left(\frac{y}{x}\right) = d(kz),$$

posons

$$kz = \mathrm{Y}, \qquad \frac{y}{x} = \mathrm{X}, \qquad x^2 = \mathrm{P}; \tag{2}$$

l'équation précédente s'écrit

$$d\mathrm{Y} - \mathrm{P}\,d\mathrm{X} = 0,$$

elle montre que P est la dérivée de Y par rapport à X. On a donc la solution générale de (1)

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{X} = \varphi(t), \qquad \mathrm{Y} = \Psi(t), \qquad \mathrm{P} = \frac{d\Psi}{d\varphi};$$

d'où x, y, z exprimées en fonction d'une variable arbitraire t au moyen de deux fonctions arbitraires. Si on prend pour variable indépendante X, on aura

$$\mathrm{Y} = f(\mathrm{X}), \qquad \mathrm{P} = f'(\mathrm{X}),$$

d'où les équations de la courbe

$$\text{(4)} \qquad kz = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad x^2 = f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

On pourra poser

$$\frac{y}{x} = u,$$

d'où les expressions de x, y, z en fonction de u

$$\text{(5)} \qquad x = \sqrt{f'(u)}, \qquad y = u\sqrt{f'(u)}, \qquad z = \frac{1}{k} f(u).$$

Il est facile, en particularisant la forme de la fonction f, d'obtenir des courbes remarquables du complexe.

1°. On obtiendra toutes les courbes algébriques du complexe en prenant pour f une fonction algébrique de u. Posons en particulier

$$f(u) = \frac{u^3}{3},$$

alors

$$f'(u) = u^2,$$

et nous avons

$$\text{(6)} \qquad x = u, \qquad y = u^2, \qquad z = \frac{u^3}{3k};$$

ces équations sont celles d'une cubique gauche osculatrice au plan de l'infini dans le direction $x = 0$, $y = 0$. Réciproquement on peut par une transformation projective ramener les équations de toute cubique gauche à la forme précédente, d'où il résulte que *les tangentes à toute cubique gauche appartiennent à un complexe linéaire.*

2°. Les formules générales (5) contiennent un radical, provenant de ce qu'on a posé $x^2 = \mathrm{P}$. On fera disparaître le radical en choisissant le paramètre de façon que P soit carré parfait. Pour cela considérons la courbe plane (X, Y) considérée comme enveloppe de la droite

$$\mathrm{Y} - u^2\mathrm{X} + 2\varphi(u) = 0,$$

car on a bien alors

$$\frac{dY}{dX} = u^2;$$

l'enveloppe est définie par l'équation de la droite et par

$$-uX + \varphi'(u) = 0,$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{\varphi'(u)}{u}, \qquad Y = u\varphi'(u) - 2\varphi(u);$$

d'où

$$(7) \qquad x = u, \qquad y = \varphi'(u), \qquad z = \frac{1}{k}\big[u\varphi'(u) - 2\varphi(u)\big];$$

et ces formules permettent de trouver toutes les courbes unicursales du complexe ; il n'y a qu'à prendre pour u une fonction rationnelle d'un paramètre arbitraire, et pour φ une fonction rationnelle de u.

3°. L'équation différentielle (1) peut encore s'écrire

$$(x^2 + y^2)\, d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = k\, dz;$$

posons

$$kz = Y, \qquad \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = X, \qquad x^2 + y^2 = P = \frac{dY}{dX}.$$

En prenant X comme variable indépendante, on aura la solution générale

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \omega, \qquad kz = f(\omega), \qquad x^2 + y^2 = f'(\omega);$$

qu'on peut encore écrire

$$(8) \qquad x = \sqrt{f'(\omega)}\, \cos\omega, \qquad y = \sqrt{f'(\omega)}\, \sin\omega, \qquad z = \frac{1}{k} f(\omega).$$

On obtient des courbes particulières en prenant

$$f(\omega) = R^2\omega + C;$$

d'où

$$(9) \qquad x = R\cos\omega, \qquad y = R\sin\omega, \qquad z = \frac{R^2}{k}\omega + a;$$

ce sont des hélices tracées sur des cylindres de révolution autour de l'axe du complexe. Le pas de ces hélices $\dfrac{2\pi R^2}{k}$ est uniquement fonction de R, donc *toutes les hélices du complexe tracées sur un même cylindre ayant l'axe du complexe pour axe ont même pas.*

Propriétés générales des courbes du complexe.

Il résulte immédiatement de la définition des courbes d'un complexe que, *dans un complexe linéaire, le plan polaire d'un point d'une courbe du complexe est le plan osculateur à la courbe en ce point.* Considérons alors les plan osculateurs à une courbe du complexe issus d'un point P. Soit A l'un des points de contact ; le plan osculateur en A étant le plan polaire de A, la droite PA appartient au complexe, et par suite est dans le plan polaire de P. Il en résulte que *les points de contact des plans osculateurs issus d'un point à une courbe d'un complexe linéaire sont dans un même plan.* En particulier *les points de contact des plans osculateurs issus d'un point à une cubique gauche sont dans un même plan passant par le point donné.*

Prenons les formules (7). Nous trouvons

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= y'z'' - z'y'' = \frac{1}{k}\varphi'\varphi'' = \frac{y}{k}\varphi''',\\
\mathrm{B} &= z'x'' - x'z'' = -\frac{u}{k}\varphi''' = -\frac{x}{k}\varphi''',\\
\mathrm{C} &= x'y'' - y'x'' = \varphi''' = \varphi''';
\end{aligned}$$

et

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \frac{1}{k}\,\varphi'''^2.$$

On voit alors que la torsion au point (x, y, z) est donnée par

$$\mathrm{T} = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{k};$$

Elle ne dépend que du point, et pas de la courbe. Donc *toutes les courbes du complexe linéaire passant par un point ont même torsion en ce point* (*Sophus Lie*).

Surfaces normales du complexe.

9. Il n'y a pas lieu de rechercher les surfaces d'un complexe linéaire. Soit en effet le complexe linéaire

$$ay - bx + kc = 0;$$

le plan polaire du point (x, y, z) est parallèle au plan

$$\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x + k\mathrm{Z} = 0,$$

et pour qu'une surface soit tangente à ce plan, il faudrait que l'on eût

$$\frac{p}{y} = \frac{q}{-x} = \frac{-1}{k},$$

ou

$$p = -\frac{y}{k}, \qquad q = \frac{x}{k};$$

et la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

n'est pas réalisée. Le problème est impossible.

Nous nous proposerons alors de chercher les surfaces dont les normales sont des droites du complexe. Nous aurons à intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$py - qx - k = 0,$$

ce qui revient à l'intégration du système

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{k} = -dt,$$

qui est précisément le système auquel on arrive lorsqu'on recherche les courbes normales aux plans polaires de leurs points. Nous pouvons écrire

$$dx = -y\,dt, \qquad dy = x\,dt, \qquad dz = -k\,dt;$$

système qui s'intègre immédiatement et donne

$$x = \mathrm{R}\cos t, \qquad y = \mathrm{R}\sin t, \qquad z = -kt + h.$$

Ces trajectoires orthogonales dépendent de deux constantes arbitraires. Ce sont des hélices circulaires ayant toutes même pas, trajectoires d'un mouvement hélicoïdal uniforme de pas $-2k$. D'où l'interprétation cinématique du complexe linéaire : considérons un mouvement hélicoïdal uniforme ; à chaque point M correspond la vitesse de ce point, et le plan polaire du point M dans le complexe est le plan perpendiculaire à cette vitesse. *Le complexe linéaire est constitué par les normales aux vitesses du mouvement instantané d'un corps solide.*

Les surfaces normales du complexe sont définies par les équations

$$x = v\cos u, \qquad y = v\sin u, \qquad z = -ku + \varphi(v);$$

car elles sont évidemment engendrées par les hélices précédentes. Ce sont les hélicoïdes engendrés par un profil quelconque dans le mouvement précédent. Les équations précédentes représentent d'ailleurs l'hélicoïde le plus général. Il en résulte que *les normales issues d'un point à un hélicoïde sont dans un même plan* (plan polaire de ce point).

Remarque. Les hélices trajectoires orthogonales des plans polaires s'obtiennent en faisant $v = \text{const.}$, et leurs trajectoires orthogonales sont les courbes du complexe situées sur les surfaces précédentes. Cherchons-les. Formons l'élément linéaire sur ces surfaces :

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = {} & (\cos u\,dv - v\,\sin u\,du)^2 \\ & + (\sin u\,dv + v\,\cos u\,du)^2 + (-m\,du + \varphi'\,dv)^2, \end{aligned}$$

$$ds^2 = (v^2 + m^2)\,du^2 - 2m\varphi'\,du\,dv + (1 + \varphi'^2)\,dv^2;$$

et les trajectoires orthogonales des hélices $v = \text{const.}$, $dv = 0$, sont définies par l'équation

$$(v^2 + m^2)\, du - m\varphi'\, dv = 0,$$

d'où

$$u = \int \frac{m\varphi'}{v^2 + m^2}\, dv.$$

Leur détermination dépend d'une quadrature.

Surfaces réglées du complexe.

10. Considérons une surface réglée dont les génératrices appartiennent au complexe ; soit G une de ses génératrices ; elle appartient au complexe, donc à chacun de ses points M correspond un plan P qui en est le plan polaire ; d'autre part au point M correspond aussi homographiquement le plan tangent à la surface en ce point ; il en résulte qu'*il y a correspondance homographique entre le plan polaire d'un point de la génératrice et le plan tangent à la surface en ce point* ; dans cette homographie il y a deux éléments doubles, donc *sur chaque génératrice de la surface il existe deux points* A, B *tels que les plans polaires de ces points soient tangents à la surface.* Considérons le lieu des points A sur la surface ; en chacun de ses points le plan tangent à la surface est le plan polaire de A ; la tangente à la courbe, qui est dans le plan tangent à la surface, est donc dans le plan polaire ; donc *le lieu des points* A*, et aussi le lieu des points* B*, qui peuvent d'ailleurs se confondre algébriquement, sont des courbes du complexe.* Le plan osculateur en chaque point est le plan polaire, donc il est tangent à la surface ; *ces courbes sont donc des asymptotiques de la surface réglée* ; les asymptotiques se déterminent au moyen d'une seule quadrature.

Il peut arriver que les génératrices de la surface appartiennent à une congruence linéaire ; elles appartiennent alors à une infinité de complexes linéaires, et pour chaque complexe, on aura deux lignes asymptotiques courbes de ce complexe. On obtiendra ainsi toutes les asymptotiques sans aucune intégration. *Les génératrices de la surface précédente s'appuient alors sur deux directrices fixes.* C'est le cas des conoïdes à plan directeur et des surfaces réglées du troisième ordre. Inversement on verrait facilement qu'une courbe quelconque du complexe est asymptotique d'une infinité de surfaces réglées du complexe ; on peut donc au moyen de ces surfaces réglées trouver une courbe quelconque du complexe.

Si les génératrices de la surface appartiennent à un complexe linéaire spécial, les courbes du complexe sont des courbes planes dont les plans contiennent la directrice du complexe ; *les surfaces normales du complexe sont de révolution autour de la directrice ; les surfaces réglées du complexe sont des surfaces dont les génératrices rencontrent une droite fixe* ; cette directrice est une asymptotique de la surface, et les autres asymptotiques se déterminent par deux quadratures.

EXERCICES.

45. Étudier les asymptotiques des surfaces réglées du troisième ordre. Montrer que ce sont des unicursales du quatrième ordre, et que chaque génératrice rencontre une

asymptotique en deux points conjugués harmoniques par rapport aux points où la génératrice s'appuie sur la droite double et sur la droite singulière.

46. Déterminer les asymptotiques de la surface de Steiner. Par quelles courbes sont-elles représentées dans la représentation paramétrique de la surface ? Étudier les cas de dégénérescence.

47. Déterminer la surface canal la plus générale dont toutes les lignes de courbure soient sphériques ; montrer que ces lignes de courbure se déterminent sans intégration.

48. Que peut-on dire de la détermination des lignes de courbure d'une surface canal, enveloppe de ∞^1 sphères coupant une sphère fixe sous un angle constant ?

49. Déterminer les surfaces réglées d'un complexe linéaire qui admettent pour ligne asymptotique une courbe donnée. Montrer que toutes leurs asymptotiques se déterminent sans intégration, et qu'elles sont algébriques si la courbe donnée est algébrique.

CHAPITRE XI.

TRANSFORMATIONS DUALISTIQUES. TRANSFORMATION DE SOPHUS LIE.

Éléments et multiplicités de contact.

1. On appelle *élément de contact* l'ensemble d'un point M et d'un plan P passant par ce point. Un tel élément sera défini par ses *coordonnées*, coordonnées x, y, z du point, et coefficients de direction $p, q, -1$ de la normale au plan. Un élément de contact est ainsi défini par cinq coordonnées.

Considérons un point A, les éléments de contact de ce point sont formés par ce point et tous les plans passant par ce point ; les coordonnées x, y, z sont fixes, et p, q arbitraires. Un point possède ∞^2 éléments de contact.

Considérons une courbe ; un de ses éléments de contact est formé d'un point de la courbe et d'un plan tangent à la courbe en ce point ; les coordonnées sont x, y, z fonctions d'un paramètre arbitraire, et p, q liés par la relation

$$px' + qy' - z' = 0,$$

il y a donc deux paramètres arbitraires. Une courbe possède ∞^2 éléments de contact.

Considérons maintenant une surface ; un de ses éléments de contact est formé par un point et le plan tangent en ce point ; ses coordonnées sont $x, y, z = f(x, y)$, $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Il y a deux paramètres arbitraires, donc une surface possède ∞^2 éléments de contact. Remarquons que p, q peuvent ne dépendre que d'un seul paramètre ; c'est le cas des surfaces développables, qui possèdent ainsi ∞^2 points et ∞^1 plans tangents, et correspondent par dualité aux courbes, qui possèdent ∞^1 points et ∞^2 plans tangents.

Les points, courbes et surfaces, qui sont engendrées par ∞^2 éléments de contact, sont appelés *multiplicités* M_2. Plus généralement on appellera *multiplicité* toute famille d'éléments de contact dont les coordonnées vérifient la relation

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0. \tag{1}$$

Si ces coordonnées ne dépendent que d'un paramètre arbitraire, on aura les multiplicités M_1 ; si elles dépendent de deux paramètres arbitraires, on aura les *multiplicités* M_2.

Cherchons à déterminer toutes les multiplicités M_2 : x, y, z, p, q sont fonctions de deux paramètres arbitraires

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v), \quad p = k(u, v), \quad q = l(u, v).$$

Considérons les trois premières relations ; entre elles on peut éliminer u, v, et par suite de cette élimination on peut obtenir une, ou deux, ou trois relations.

Supposons d'abord qu'on obtienne une relation

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0,$$

on peut considérer z comme fonction de x, y ; et si on écrit que la relation (1) est satisfaite quels que soient, x, y, on a

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

et on a les éléments de contact d'une surface.

Supposons qu'on obtienne deux relations

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0, \qquad \mathrm{G}(x, y, z) = 0;$$

on peut considérer x, y comme fonctions de z

$$x = \varphi(z), \qquad y = \psi(z),$$

et l'équation (1) devient

$$dz - p\varphi'(z)\,dz - q\psi'(z)\,dz = 0,$$

ou

$$p\varphi'(z) + q\psi'(z) - 1 = 0;$$

le plan de l'élément de contact est tangent à la courbe $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$, on a les éléments de contact d'une courbe.

Enfin si on obtient trois relations, c'est que x, y, z sont des constantes ; l'équation (1) est alors vérifiée quels que soient p, q, qui sont alors les paramètres arbitraires, et on a les éléments de contact d'un point.

Cherchons maintenant les multiplicités M ; nous avons

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t), \qquad p = k(t), \qquad q = l(t).$$

Considérons les trois premières équations, et entre elles éliminons t. Il y a deux ou trois relations.

S'il y a deux relations, le lieu des points de la multiplicité, qu'on appelle aussi *support de la multiplicité*, est une courbe, et les plans ne dépendant que d'un paramètre, pour chaque point de la courbe il y a un plan tangent déterminé ; on a une *bande d'éléments de contact.*

S'il y a trois relations, x, y, z sont des constantes, le support est un point ; on a alors une famille de plans dépendant d'un paramètre et passant par un point fixe ; c'est ce qu'on appelle un *cône élémentaire.*

Considérons deux multiplicités M_2 ; elles peuvent avoir en commun, zéro ou un élément de contact, ou une infinité.

Considérons le cas d'*un élément de contact commun* ; si les multiplicités sont deux points A, A', il ne peut y avoir un élément de contact commun que si les deux points sont confondus, et alors il y a ∞^2 éléments de contact communs. Si on a un point et une courbe, le point est sur la courbe, et tous les plans tangents à la courbe en ce point appartiennent à des éléments de contact communs, qui sont ainsi au nombre de ∞^1. Si on a un point et une surface, le point sera sur la surface, et l'élément de contact commun sera constitué par le point et le plan tangent à la surface en ce point. Considérons deux courbes ; si elles ont un élément de contact commun, elles se rencontrent en un point, et si elles n'y sont pas tangentes, il n'y a qu'un élément de contact commun. Considérons une courbe et une surface ; il y aura un élément de contact commun si la courbe est tangente à la surface. Enfin deux surfaces ont un élément de contact commun si elles sont tangentes en un point.

Il y aura ∞^1 *éléments de contact communs* pour un point sur une courbe, deux courbes tangentes en un point, une courbe sur une surface, deux surfaces circonscrites le long d'une courbe.

Considérons un *point qui décrit une courbe* ; on a une famille de ∞^1 points dont chacun donne à la courbe ∞^1 éléments de contact. Considérons une *surface engendrée par une courbe* ; nous avons ∞^1 courbes (c) dont chacune a en commun avec la surface une bande, et par suite donne à la surface ∞^1 éléments de contact. Considérons ∞^1 surfaces ; leur *enveloppe* a avec chacune d'elles une bande commune ; nous avons encore ∞^1 éléments générateurs d'une multiplicité M_2, donnant chacun à la multiplicité ∞^1 éléments de contact.

On pourrait considérer le cas où chaque élément générateur ne donne qu'un élément de contact à la multiplicité : ∞^2 points engendrant une surface ; ∞^2 courbes formant une congruence de courbes (dans ce cas, comme dans celui des congruences de droites, il y a en général une surface focale, tangente à chacune de ces courbes, et ayant avec chacune un élément de contact commun) ; enfin si on considère ∞^2 surfaces, leur enveloppe a en commun avec chacune d'elles un élément de contact.

Remarque. Dans les trois cas précédents, quand nous disons que chaque élément générateur donne un élément de contact à la multiplicité, il faut entendre que cette multiplicité peut se décomposer en nappes, et que cela s'applique alors à chacune des nappes séparément.

Il y a un cas exceptionnel, celui de ∞^1 courbes ayant une enveloppe ; on a alors ∞^1 courbes cédant chacune à la multiplicité ∞^1 éléments de contact.

Transformations de contact.

2. On appelle *transformation de contact* toute transformation des éléments de contact qui change une multiplicité M_2 en une multiplicité M_2. On a cinq équations de transformation

$$x' = f(x, y, z, p, q), \quad y' = g(x, y, z, p, q), \quad z' = h(x, y, z, p, q),$$
$$p' = k(x, y, z, p, q), \qquad q' = l(x, y, z, p, q).$$

Si l'élément de contact (x, y, z, p, q) appartient à un multiplicité, on a

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \tag{1}$$

et pour que l'élément transformé (x', y', z', p', q') appartienne aussi à une multiplicité, il faut que l'on ait

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0.$$

Une transformation de contact laisse invariante l'équation (1). Une telle transformation change deux multiplicités ayant un élément de contact commun en deux multiplicités ayant un élément de contact commun, et de même deux multiplicités ayant ∞^1 éléments de contact communs en deux multiplicités ayant ∞^1 éléments de contact communs. Une transformation de contact change les points, courbes et surfaces en points, courbes, ou surfaces indistinctement.

Reprenons les équations de la transformation, et entre elles éliminons p, q, nous obtenons une, ou deux, ou trois relations entre $x, y, z,\ x', y', z'$.

Si on obtient trois relations,

$$x' = f(x, y, z), \qquad y' = g(x, y, z), \qquad z' = h(x, y, z), \tag{2}$$

dans la transformation de contact est contenue une transformation ponctuelle. Une telle transformation change un point en point, une courbe en courbe, une surface en surface ; deux courbes qui se rencontrent se transforment en deux courbes qui se rencontrent, deux surfaces tangentes en deux surfaces tangentes. A un élément de contact commun à deux multiplicité correspond un élément de contact commun aux deux multiplicités transformées. On obtiendra p', q' en fonction de p, q en considérant z' comme fonction de x', y'. On a

$$\begin{aligned}
dx' &= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,(p\,dx + q\,dy),\\
dy' &= \frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy + \frac{\partial g}{\partial z}\,(p\,dx + q\,dy),\\
dz' &= \frac{\partial h}{\partial x}\,dx + \frac{\partial h}{\partial y}\,dy + \frac{\partial h}{\partial z}\,(p\,dx + q\,dy);
\end{aligned}$$

éliminant dx, dy entre ces trois relations, on a

$$dz' = k(x, y, z, p, q)\,dx' + l(x, y, z, p, q)\,dy',$$

d'où

$$p' = k(x, y, z, p, q), \qquad q' = l(x, y, z, p, q).$$

Supposons ensuite que l'on obtienne une relation d'élimination

$$\Omega(x, y, z, x', y', z') = 0. \tag{3}$$

Considérons un point $\mathrm{A}(x, y, z)$ du premier espace ; cherchons la multiplicité qui lui correspond dans le deuxième espace ; elle est engendrée par des éléments de contact dont les points sont liés au point A par l'équation (3) qui représente une surface S'_{A}. La multiplicité correspondant à un point est une surface. Si on a une courbe lieu de points A, il lui correspond une famille de ∞^1 surfaces, et la multiplicité engendrée par ces surfaces, c'est-à-dire leur enveloppe, sera la transformée de la courbe. Enfin si on a une surface lieu de ∞^2 points A, il leur correspondra ∞^2 surfaces dont l'enveloppe correspondra à la surface donnée.

Transformations dualistiques.

Supposons la relation (3) bilinéaire en $x, y, z,\ x', y', z'$. A chaque point du premier espace correspond un plan du deuxième espace et réciproquement. A ∞^3 points du premier espace correspondent ∞^3 plans distincts. Écrivons

$$\Omega = \mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}z' + \mathrm{D}$$

ou

$$\mathrm{A} = ux + vy + wz + h, \quad \mathrm{B} = u'x + \dots, \quad \mathrm{C} = u''x + \dots, \quad \mathrm{D} = u'''x + \dots;$$

pour avoir la transformée d'une surface

$$f(x', y', z') = 0$$

il faut prendre l'enveloppe des plans $\Omega = 0$, x', y', z' étant liés par la relation précédente, ce qui donne

$$\frac{\mathrm{A}}{\dfrac{\partial f}{\partial x'}} = \frac{\mathrm{B}}{\dfrac{\partial f}{\partial y'}} = \frac{\mathrm{C}}{\dfrac{\partial f}{\partial z'}} = \frac{\mathrm{D}}{\dfrac{\partial f}{\partial t'}}.$$

Telles sont les équations de la transformation. Il faudra que l'on en puisse tirer x, y, z : donc que les formes $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$, soient indépendantes, et alors l'ensemble des plans $\Omega = 0$ constitue bien l'ensemble de tous les plans de l'espace. La transformation précédente est une *transformation dualistique*. L'ensemble des transformations de contact forme évidemment un groupe ; une transformation de contact peut se décomposer en transformations de contact plus simples.

Prenons pour nouvelles variables

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}, \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{B}, \qquad \mathrm{Z} = \mathrm{C}, \qquad \mathrm{T} = \mathrm{D};$$

alors

$$\Omega = \mathrm{X}x' + \mathrm{Y}y' + \mathrm{Z}z' + 1 = 0,$$

la transformation est une transformation par polaires réciproques par rapport à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0,$$

et toute transformation dualistique se ramène à la transformation précédente suivie d'une transformation projective.

Considérons celles de ces transformations qui sont *symétriques* ou *involutives*, telles que le plan homologue d'un point soit le même, qu'on considère le point comme appartenant à l'un ou à l'autre espace. Les équations

$$\Omega(x, y, z, x', y', z') = 0, \qquad \Omega(x', y', z', x, y, z) = 0,$$

doivent être équivalentes ; on doit donc avoir, k étant un facteur constant

$$\Omega(x, y, z, x', y', z') = k\Omega(x', y', z', x, y, z);$$

faisons $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$,

$$\Omega(x, y, z, x, y, z) = k\Omega(x, y, z, x, y, z);$$

alors ou bien $\Omega(x, y, z, x, y, z) = 0$, ou bien $k = 1$.

Si $\Omega = 0$, le plan correspondant à un point passe par ce point. On a

$$x(ux + vy + wz + h) + y(u'x + v'y + w'z + h') \\ + z(u''x + v''y + w''z + h'') + u'''x + v'''y + w'''z + h''' = 0,$$

ce qui revient à écrire que le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & v & w & h \\ u' & v' & w' & h' \\ u'' & v'' & w'' & h'' \\ u''' & v''' & w''' & h''' \end{vmatrix}$$

est un déterminant, symétrique gauche, donc de la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{C} & -\mathrm{B} & \mathrm{P} \\ -\mathrm{C} & 0 & \mathrm{A} & \mathrm{Q} \\ \mathrm{B} & -\mathrm{A} & 0 & \mathrm{R} \\ -\mathrm{P} & -\mathrm{Q} & -\mathrm{R} & 0 \end{vmatrix}$$

et l'équation devient

$$\Omega = x'(\mathrm{C}y - \mathrm{B}z + \mathrm{P}) + y'(-\mathrm{C}x + \mathrm{A}z + \mathrm{Q}) + z'(\mathrm{B}x - \mathrm{A}y + \mathrm{R}) - \mathrm{P}x - \mathrm{Q}y - \mathrm{R}z = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}(yz' - zy') + \mathrm{B}(zx' - xz') + \mathrm{C}(xy' - yx') \\ &\qquad\qquad + \mathrm{P}(x' - x) + \mathrm{Q}(y' - y) + \mathrm{R}(z' - z) = 0, \end{aligned}$$

équation d'un complexe linéaire. Le lieu des points (x', y', z') associés au point (x, y, z) est le plan polaire du point (x, y, z) par rapport au complexe. Le plan polaire d'un point est la multiplicité transformée de ce point et réciproquement. La transformée d'une droite est sa conjuguée, une droite du complexe est à elle-même sa transformée. deux multiplicités transformées sont les deux multiplicités focales d'une congruence de droites du complexe et réciproquement : à une courbe correspond en général une développable ; à une courbe du complexe correspond la développable de ses tangentes.

Si nous prenons maintenant la solution $k = 1$, nous avons

$$x'(ux + vy + wz + h) + \ldots = x(ux' + vy' + wz' + h) + \ldots,$$

la forme Ω est symétrique en x, y, z, x', y', z', et on a

$$\begin{aligned} \Omega = {} & axx' + byy' + czz' \\ & \qquad + m(yz' + zy') + n(zx' + xz') + p(xy' + yx') \\ & \qquad\qquad + r(x + x') + s(y + y') + t(z + z') + u. \end{aligned}$$

Les deux points (x, y, z), $(x', y,' z')$ sont conjugués par rapport à la quadrique

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2myz + 2nzx + 2pxy + 2rx + 2sy + 2tz + u = 0.$$

Nous avons la transformation par polaires réciproques.

D'une façon générale, pour avoir les équations d'une transformation de contact définie par une seule relation $\Omega = 0$, on écrira que la relation

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0,$$

est conséquence des relations

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad d\Omega = 0;$$

ce qui donne

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = \lambda(dz - p\,dx - q\,dy) + \mu\,d\Omega.$$

En identifiant, on a six équations ; si entre elles on élimine λ, μ, on a quatre équations qui jointes à $\Omega = 0$ donnent x', y', z', p', q' en fonction de x, y, z, p, q.

Passons enfin au cas où on a deux relations d'élimination

$$\Omega(x, y, z, x', y', z') = 0, \qquad \Theta(x, y, z, x', y', z') = 0. \tag{4}$$

A un point M du premier espace correspond dans le deuxième espace une courbe (c'). A une courbe lieu de ∞^1 points correspond une surface engendrée par ∞^1 courbes ; à une surface (S) lieu de ∞^2 points correspond une congruence de courbes ; une telle congruence a en général une surface focale, tangente à toutes ces courbes, et qui sera la transformée de la surface (S).

Pour avoir les équations d'une telle transformation, on écrira que la relation

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0$$

est conséquence des relations

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad d\Omega = 0, \qquad d\Theta = 0;$$

ce qui donne

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = \lambda(dz - p\,dx - q\,dy) + \mu d\Omega + \nu d\Theta.$$

En identifiant on a six équations ; si entre elles on élimine λ, μ, ν on a trois équations qui jointes à $\Omega = 0$, $\Theta = 0$, donnent les formules de transformation.

Transformation de Sophus Lie.

3. Supposons les équations (4) bilinéaires. A un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ correspond une droite D′. Aux ∞^3 points M correspond un complexe de droites D′, soit (K′). De même à tous les points du deuxième espace correspond dans le premier espace un complexe (K). Considérons une seule des équations (4) ; à chaque point M correspond un plan P′ ; l'autre équation au même point M fait correspondre un plan Q′ et la droite D′ est l'intersection des plans P′, Q′ qui correspondent au point M dans les deux homographies les plans P′ correspondent homographiquement aux plans Q′ ; le complexe (K′) est le complexe des droites intersections des plans qui se correspondent dans deux homographies. (C'est le complexe de Reye, ou *complexe tétraédral* ; les droites sont coupées par un tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Le rapport anharmonique des quatre plans menés par une droite du complexe et par les quatre sommets du tétraèdre est constant (Von Staudt). Le complexe (K′) est du deuxième degré, la surface des singularités est constituée par les quatre faces

du tétraèdre). A une courbe (c) correspond une surface réglée du complexe (K′). A une surface (S) correspond une congruence de droites appartenant au complexe (K′) ; cette congruence admet deux multiplicités focales. A un élément de contact du premier espace correspondent deux éléments de contact de l'autre.

Cherchons les équations des deux complexes. Soient

$$\Omega = \mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}z' + \mathrm{D}, \qquad \Theta = \mathrm{L}x' + \mathrm{M}y' + \mathrm{N}z' + \mathrm{P}.$$

Soit $\mathrm{M}'(x', y'z')$ un point du deuxième espace. Soit D la droite correspondante ; si (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0) sont deux points de cette droite, on a

$$\begin{aligned} &\Omega(x, y, z, x', y', z') = 0, &\qquad &\Theta(x, y, z, x', y', z') = 0,\\ &\Omega(x_0, y_0, z_0, x', y', z') = 0, &\qquad &\Theta(x_0, y_0, z_0, x', y', z') = 0. \end{aligned}$$

Éliminons $x', y,' z'$ entre ces quatre équations, nous avons

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D}\\ \mathrm{A}_0 & \mathrm{B}_0 & \mathrm{C}_0 & \mathrm{D}_0\\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} & \mathrm{P}\\ \mathrm{L}_0 & \mathrm{M}_0 & \mathrm{N}_0 & \mathrm{P}_0 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation du complexe. En développant par la règle de Laplace, on trouvera une équation du deuxième degré par rapport aux coordonnées de la droite. Le complexe (K), et de même le complexe (K′), est en général du deuxième degré.

A une courbe (c) correspond une surface réglée engendrée par la droite D′. Cherchons si cette surface réglée peut être développable. Les droites D′ ont pour équations

$$\mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}z' + \mathrm{D} = 0, \qquad \mathrm{L}x' + \mathrm{M}y' + \mathrm{N}z' + \mathrm{P} = 0;$$

x, y, z, et par suite $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$, étant fonctions d'un paramètre t. Exprimons que cette droite rencontre la droite infiniment voisine : nous adjoignons a ses équations les équations :

$$x'\,d\mathrm{A} + y'\,d\mathrm{B} + z'\,d\mathrm{C} + d\mathrm{D} = 0, \qquad x'\,d\mathrm{L} + y'\,d\mathrm{M} + z'\,d\mathrm{N} + d\mathrm{P} = 0;$$

d'où la condition

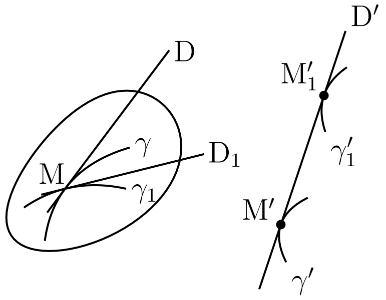
$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D}\\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} & \mathrm{P}\\ d\mathrm{A} & d\mathrm{B} & d\mathrm{C} & d\mathrm{D}\\ d\mathrm{L} & d\mathrm{M} & d\mathrm{N} & d\mathrm{P} \end{vmatrix} = 0.$$

Or, l'équation du complexe (K) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D}\\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} & \mathrm{P}\\ \Delta\mathrm{A} & \Delta\mathrm{B} & \Delta\mathrm{C} & \Delta\mathrm{D}\\ \Delta\mathrm{L} & \Delta\mathrm{M} & \Delta\mathrm{N} & \Delta\mathrm{P} \end{vmatrix} = 0,$$

$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ étant des fonctions linéaires, les accroissements Δ sont proportionnels aux différentielles d. La courbe (c) est donc telle que sa tangente appartient au complexe (K). Aux courbes du premier complexe correspondent des développables engendrées par les tangentes aux courbes du deuxième complexe. Au point M d'une courbe (c) du premier complexe correspond une génératrice T′ d'une développable, soit M′ son point de contact avec l'arête de rebroussement ; si on considère un élément linéaire formé d'un point M et d'une droite D du premier complexe passant par ce point, il lui correspondra un élément linéaire déterminé du deuxième complexe. Les courbes des deux complexes se correspondent ainsi par points et par tangentes.

Soit une surface (S), et supposons le complexe (K) effectivement du deuxième degré. Considérons un point M de la surface et le plan tangent P. Le cône du complexe (K) de sommet M est coupé par le plan P suivant deux droites D, D_1 qui appartiennent au complexe (K). Par chaque point de (S) passent ainsi deux droites du complexe (K) tangentes à la surface. Par tout point de la surface (S) passent donc deux courbes $(\gamma), (\gamma_1)$ du complexe (K) situées sur cette surface. Au point M correspond une droite D′ du complexe (K′). A la droite D du complexe (K) correspond un point M′ de D′ ; et de même à la droite D, correspond un point M'_1 de D′. Aux courbes $(\gamma), (\gamma_1)$ du complexe (K) correspondent deux courbes $(\gamma'), (\gamma'_1)$ du complexe (K′) tangentes en $\mathrm{M}', \mathrm{M}'_1$ à la droite D′. Si le point M décrit la courbe (γ), les droites D′ ont pour enveloppe la courbe (γ'_1), et si M décrit (γ_1), D′ enveloppe (γ'_1). Si on considère la congruence des droites D′ correspondant aux points M de la surface (S), les courbes (γ'_t) sont les arêtes de rebroussement d'une des familles de développables de cette congruence et les courbes (γ'_1) sont les arêtes de rebroussement de l'autre famille. Les courbes (γ') engendrent une des nappes de la surface focale, les courbes (γ'_1) engendrent l'autre nappe. Le plan tangent en M′ à la multiplicité focale est le plan osculateur à (γ'_1), et par suite le plan tangent au cône du complexe (K′) de sommet M'_1. Un élément de contact correspondant à l'élément (M, P) est formé du point M′ et du plan tangent au cône du complexe (K′) qui a pour sommet M'_1. L'autre élément correspondant à (M, P) est formé du point M'_1 et du plan tangent au cône du complexe (K′) qui a pour sommet M′.



Si la surface (S) est une surface du complexe (K), tangente en chacun de ses points au cône du complexe, les droites D, D_1 sont confondues ; alors les deux éléments de contact correspondant à l'élément (M, P) sont confondus, et la surface (S′) définie par ces éléments est une surface du complexe (K′).

Remarques. Les seuls cas possibles sont les suivants :

1°. Les complexes (K), (K′) sont effectivement du deuxième degré. On démontre alors, comme nous l'avons dit précédemment, qu'ils sont tous deux tétraédraux.

2°. Un des complexes est linéaire. On démontre que l'autre est constitué par les droites qui rencontrent une conique.

3°. Les deux complexes sont linéaires. On démontre qu'ils sont tous deux spéciaux. Ce cas donne la *transformation d'Ampère*, définie par les équations

$$x' = p, \qquad y' = -y, \qquad z' = -z - px, \qquad p' = x, \qquad q' = -q.$$

Transformation des droites en sphères.

4. Prenons en particulier :

$$\Omega = x + iy + x'z + z' = 0, \qquad \Theta = x'(x - iy) - z - y' = 0$$

L'équation du premier complexe est :

$$\begin{vmatrix} z - z_0 & 0 & 0 & x + iy - (x_0 + iy_0) \\ z_0 & 0 & 1 & x_0 + iy_0 \\ x - iy & -1 & 0 & -z \\ x_0 - iy_0 - (x - iy) & 0 & 0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui devient :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\text{(K)} \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Le complexe (K) est le complexe des droites minima. Cherchons le deuxième complexe. Il suffit de considérer deux points (x', y', z') correspondant au même point (x, y, z). Nous avons :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x' - x'_0 & z' - z'_0 \\ 1 & i & x'_0 & z'_0 \\ x' - x'_0 & -i(x' - x'_0) & 0 & -(y' - y'_0) \\ x'_0 & -ix'_0 & -1 & y'_0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui devient :

$$(x' - x'_0)(x'y'_0 - y'x'_0) - (z' - z'_0)(x' - x'_0) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$a(r + c) = 0;$$

la solution $a = 0$ est singulière, et on a pour le complexe (K$'$)

$$\text{(K}'\text{)} \qquad r + c = 0.$$

Nous avons ainsi une *correspondance entre un complexe spécial du deuxième degré et un complexe linéaire*. Le cône du complexe (K) sera le cône isotrope. A chaque élément de contact du premier espace correspondent deux éléments de contact du deuxième espace conjugués par rapport au complexe (K$'$), car d'une façon générale les points M$'$, M$'_1$, sont sur une droite D$'$ de (K$'$) et le plan associé à M$'$ est ici le plan polaire de M$'_1$ et inversement.

Partons d'une sphère ; prenons deux génératrices d'un système ; ce sont des droites minima D, D_1. Le deuxième système de génératrices est entièrement défini, car chacune d'elles doit rencontrer D, D_1, et le cercle imaginaire à l'infini. Aux deux droites D, D_1 correspondent deux points $\mathrm{M}', \mathrm{M}'_1$. Considérons une génératrice isotrope Δ rencontrant D, D_1, il lui correspond un point μ' ; Δ rencontrant la droite D, la droite $\mathrm{M}'\mu'$ est une droite du complexe linéaire, et de même $\mathrm{M}'_1\mu'$; donc μ_1 est le pôle d'un plan passant par $\mathrm{M}'_1\mathrm{M}'$. Lorsque Δ décrit la sphère, le plan $\mu'\mathrm{M}'\mathrm{M}'_1$ tourne autour de $\mathrm{M}'\mathrm{M}'_1$, et le lieu de μ' est la droite conjuguée de $\mathrm{M}'_1\mathrm{M}'$. A la sphère correspond une droite. En partant du deuxième système de génératrices, au système D, D_1, correspondrait la droite $\mathrm{M}'_1\mathrm{M}'$. *A une sphère correspondent en réalité deux droites conjuguées par rapport au complexe linéaire.*

Ceci peut se voir par le calcul. Prenons la droite (Δ')

$$(\Delta') \qquad x' = az' - q, \qquad y' = bz' + p;$$

$c = 1$ et $r = -ap - bq$. La surface réglée correspondante est engendrée par les droites

$$x + iy + z(az' - q) + z' = 0, \qquad (az' - q)(x - iy) - z - bz' - p = 0,$$

ou

$$x + iy - qz + z'(az + 1) = 0, \qquad -q(x - iy) - z - p + z'\bigl[a(x - iy) - b\bigr] = 0.$$

Éliminant z' on a la surface

$$(x + iy - qz)\bigl[a(x - iy) - b\bigr] + (az + 1)\bigl[q(x - iy) + z + p\bigr] = 0,$$

ou

$$a(x^2 + y^2 + z^2) - b(x + iy) + q(x - iy) + (c - r)z + p = 0,$$

c'est l'équation d'une sphère et il est facile de voir que ce peut être une sphère quelconque, en choisissant (Δ') convenablement.

Cherchons la conjuguée de (Δ') par rapport à (K'). Nous avons à exprimer que le complexe (K') et les complexes spéciaux $(\Delta), (\Delta')$ appartiennent à un même faisceau. Ce qui donne

$$\begin{aligned} &\lambda a + \lambda' a' = 0, &&\lambda b + \lambda' b' = 0, &&\lambda c + \lambda' c' + 1 = 0,\\ &\lambda p + \lambda' p' = 0, &&\lambda q + \lambda' q' = 0, &&\lambda r + \lambda' r' + 1 = 0; \end{aligned}$$

prenons $\lambda' = -\lambda$, nous avons :

$$\begin{aligned} &a' = a, &&b' = b, &&c' = c + \frac{1}{\lambda},\\ &p' = p, &&q' = q, &&r' = r + \frac{1}{\lambda}; \end{aligned}$$

prenons $\lambda = -\dfrac{1}{c + r}$, alors $c' = -r$ et $r' = -c$, et l'on voit que l'on retrouve la même sphère.

Les formules de la transformation se calculent par la méthode générale. On trouve :

$$x = -\frac{z'}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{x'(x'p+y'q)+y'-p'}{q'+x'}, \qquad y = \frac{iz'}{2} - \frac{i}{2}\,\frac{x'(x'p+y'q)-y'+p'}{q'+x'},$$
$$z = -\frac{x'p'+y'q'}{q'+x'}, \qquad p = \frac{x'q'+1}{q'-x'}, \qquad q = -i\frac{x'q'-1}{q'-x'}.$$

Cette transformation de Sophus Lie, changeant des droites qui se rencontrent en sphères tangentes, c'est-à-dire des droites qui ont un élément de contact commun en sphères ayant un élément de contact commun, réalise par suite la correspondance signalée dans les chapitres précédents entre les droites et les sphères.

Par exemple elle transforme une surface réglée en surface canal ; une quadrique en cyclide de Dupin ; une surface développable en surface canal isotrope ; une bande asymptotique d'une surface en une bande de courbure de la transformée ; de sorte qu'on peut dire qu'elle transforme les lignes asymptotiques en lignes de courbure.

On vérifiera facilement qu'elle transforme un complexe linéaire de droites en une famille de ∞^2 sphères coupant une sphère fixe sous un angle constant ; et que cet angle constant est droit, lorsque le complexe linéaire est en involution avec le complexe (K′).

Transformation des lignes asymptotiques.

5. Proposons-nous de trouver toutes les transformations de contact qui changent les lignes asymptotiques d'une surface quelconque en les lignes asymptotiques de la transformée de cette surface ; c'est-à-dire qui changent toute bande asymptotique en une bande asymptotique. Remarquons à cet effet qu'une telle transformation changera toute multiplicité M_2 sur laquelle les bandes asymptotiques ne dépendent pas seulement de constantes arbitraires, mais dépendent de fonctions arbitraires, en une multiplicité M_2 de même nature. Or, les bandes asymptotiques (ou de rebroussement) étant définies par les équations

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad dp\,dx + dq\,dy = 0,$$

on devra considérer comme bande asymptotique, dans la question actuelle, ∞^1 éléments de contact ayant le même point,

$$dx = dy = dz = 0, \qquad p = f(q),$$

c'est-à-dire un cône élémentaire.

Et, dès lors, les M_2 particulières en question sont les plans, les droites et les points. Les transformations cherchées échangent donc entre elles les figures qui sont des droites, des points ou des plans. De là plusieurs cas à examiner :

1°. Si la transformation est ponctuelle, elle échange les points en points, les plans en plans, et les droites en droites. C'est par suite une *transformation homographique*.

2°. Si la transformation est une transformation de contact de la première espèce, c'est-à-dire fait correspondre à chaque point du premier espace (E) une surface du second espace (E′), elle change les points de (E) en les plans de (E′) ; et comme elle fait alors correspondre aussi à chaque point de (E′) une surface de (E), elle change les points de (E′) en les plans de (E) ; et dès lors elle change les points en plans, les plans en points, et les droites en droites. Si donc on la compose avec une transformation par polaires réciproques, on obtient une transformation homographique ; et, par suite, elle s'obtient en composant une transformation homographique avec une transformation par polaires réciproques. C'est donc une *transformation dualistique.*

3°. Si la transformation est une transformation de contact de la deuxième espèce, c'est-à-dire si à tout point de l'un des espaces correspond dans l'autre une courbe, à tout point de l'un des espaces correspondra dans l'autre une droite. Or, prenons dans l'espace (E) quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 non situés dans un même plan, et soient D_1, D_2, D_3, D_4 les droites qui leur correspondent dans l'espace (E′). Il existe au moins une droite Δ ayant avec chacune des quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 un élément de contact commun ; et à Δ devrait correspondre dans (E) un point, un plan ou une droite ayant un élément de contact commun avec chacun des quatre points P_1, P_2, P_3, P_4. Or, il n'en existe pas. Donc *ce troisième cas est impossible.*

Les seules transformations pouvant répondre à la question sont donc homographiques ou dualistiques. Mais toute transformation de contact changeant les droites en droites répond à la question, car elle changera une famille de génératrices d'une développable, dont chacune a un élément de contact commun avec la génératrice infiniment voisine, en les génératrices d'une autre développable ; et, par suite, la bande de rebroussement de la première développable ou la bande de rebroussement de la seconde.

Nous pouvons donc conclure :

1°. *Les transformations homographiques et les transformations dualistiques changent les lignes asymptotiques en lignes asymptotiques ; et ce sont les seules transformations de contact possédant cette propriété.*

2°. *Ces transformations sont aussi les seules transformations de contact changeant toute droite en une droite.*

Transformations des lignes de courbure.

6. La transformation de contact des droites en sphères, de Lie, permet de déduire immédiatement des résultats précédents toutes les transformations de contact qui changent les lignes de courbure d'une surface quelconque en les lignes de courbure de sa transformée.

On voit de plus que ce sont aussi celles qui changent toute sphère en une sphère. On aurait pu du reste refaire un raisonnement direct analogue à celui du N° précédent, en partant des multiplicités M_2 pour lesquelles les bandes de courbure dépendent de fonctions arbitraires.

Cherchons, plus spécialement, celles des transformations considérées qui sont des transformations ponctuelles. Dans la transformation de Lie, les points de l'espace (E) correspondent aux droites d'un complexe linéaire (K′). Les transformations cherchées proviennent donc des transformations projectives ou dualistiques qui laissent invariant ce complexe. On les obtient en composant avec la transformation par polaires réciproques définie par ce complexe (K′) l'une quelconque des transformations projectives qui laissent le complexe invariant.

Ainsi se trouve établie une correspondance entre le groupe projectif d'un complexe linéaire et le groupe des transformations ponctuelles qui changent toute sphère en sphère. Ce dernier est ce qu'on appelle le groupe conforme ; on sait que ses transformations s'obtiennent en combinant des inversions, des homothéties et des déplacements.

Parmi les transformations de contact qui changent les lignes de courbure en lignes de courbure figurent les *dilatations*, dans lesquelles chaque élément de contact subit une translation perpendiculaire à son plan et d'amplitude donnée, c'est-à-dire dans lesquelles chaque surface est remplacée par une surface parallèle.

Parmi ces transformations figurent aussi les transformations de Ribaucour qui seront définies au chapitre XIII.

EXERCICES.

50. Étudier la congruence des droites définies par les équations

$$\mathrm{A}\lambda + \mathrm{B}\mu + \mathrm{C} = 0, \qquad \mathrm{A}_1\lambda + \mathrm{B}_1\mu + \mathrm{C}_1 = 0,$$

où $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$, $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1$ sont des fonctions linéaires des coordonnées et λ, μ des paramètres arbitraires. Discuter en particulier la question des droites passant par un point, des droites rencontrant une droite fixe, des droites situées dans un plan, des multiplicités focales.

51. Démontrer les résultats énoncés à la fin du N° 3 de ce chapitre.

52. Démontrer par le calcul les propriétés de la transformation de Lie énoncées à la fin du N° 4 de ce chapitre.

CHAPITRE XII.

SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX.

Théorème de Dupin.

1. L'emploi des coordonnées rectangulaires revient à celui d'un système de trois plans orthogonaux. On peut généraliser et employer comme surfaces coordonnées un système triple quelconque :

$$\varphi(x, y, z) = u, \qquad \psi(x, y, z) = v, \qquad \chi(x, y, z) = w;$$

ces formules transforment les coordonnées u, v, w en coordonnées x, y, z. Si nous résolvons les équations précédentes en x, y, z, ce que nous supposons possible, nous aurons

$$(1) \qquad x = f(u, v, w), \qquad y = g(u, v, w), \qquad z = h(u, v, w).$$

On emploie en général un *système triple orthogonal.* Cherchons donc à exprimer que les équations (1) définissent un système triple orthogonal. Les intersections des surfaces deux à deux doivent être orthogonales. Les surfaces des trois familles s'obtiendront en faisant successivement $u =$ const., $v =$ const., $w =$ const. Les intersections des surfaces deux à deux sont respectivement ($v =$ const., $w =$ const.), ($w =$ const., $u =$ const.), ($u =$ const., $v =$ const.), et les directions des tangentes sont respectivement $\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial g}{\partial u}, \dfrac{\partial h}{\partial u}$; $\dfrac{\partial f}{\partial v}, \dfrac{\partial g}{\partial v}, \dfrac{\partial h}{\partial v}$; et $\dfrac{\partial f}{\partial w}, \dfrac{\partial g}{\partial w}, \dfrac{\partial h}{\partial w}$. La condition d'orthogonalité est

$$(2) \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial f}{\partial w} = 0, \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Interprétons ces conditions. Prenons la surface $w =$ const. La troisième condition exprime que sur cette surface les lignes $u =$ const., $v =$ const. sont orthogonales, et les deux premières expriment que $\dfrac{\partial f}{\partial w}, \dfrac{\partial g}{\partial w}, \dfrac{\partial h}{\partial w}$ est une direction perpendiculaire aux tangentes à ces deux courbes, et par suite, que c'est la direction de la normale ; soient l, m, n ces trois coefficients de direction. Différentions la troisième relation par rapport à w nous avons

$$\sum \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w} + \sum \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial w} = 0,$$

ou

$$\sum \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial l}{\partial v} + \sum \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial l}{\partial u} = 0.$$

Or, on a

$$\sum l\,\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \qquad \sum l\,\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

d'où

$$\sum l\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} = -\sum \frac{\partial l}{\partial v}\,\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \sum l\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} = -\sum \frac{\partial l}{\partial u}\,\frac{\partial f}{\partial v},$$

et la condition précédente s'écrit

$$\sum l \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

ou $\mathrm{F}' = 0$, ce qui exprime que les lignes $u =$ const., $v =$ const., c'est-à-dire les intersections de la surface $w =$ const. avec les surfaces $u =$ const. et $v =$ const. sont conjuguées sur cette surface, et comme elles sont orthogonales, ce sont des lignes de courbure. D'où le *Théorème de Dupin : sur chaque surface d'un système triple orthogonal, les intersections avec les autres surfaces de ce système sont des lignes de courbure.*

Équation aux dérivées partielles de Darboux.

2. Proposons-nous de rechercher les systèmes triples orthogonaux. Prenons une famille de surfaces :

$$\varphi(x, y, z) = u \tag{1}$$

et cherchons à déterminer deux autres familles constituant avec celle-ci un système triple orthogonal. Prenons dans l'espace un point M ; par ce point M passe une surface u ; prenons les tangentes $\mathrm{MT}, \mathrm{MT}'$ en M à ses lignes de courbure. Ces droites sont parfaitement déterminées ; si $p, q, -1$ sont les coefficients de direction de MT, ce sont des fonctions connues de x, y, z. De même pour MT'. Il faudra alors qu'en chaque point M, une surface d'une autre famille, soit

$$\psi(x, y, z) = v, \tag{2}$$

soit normale à MT ; il faudra donc que p, q soient les dérivées partielles de z par rapport à x, y, (z étant défini par l'équation précédente). On aura donc

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + p\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} + q\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0.$$

Ces équations ne sont pas compatibles en général : pour qu'elles le soient, il faut et il suffit, d'après la théorie des systèmes complets, que l'on ait :

$$\frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{3}$$

équation aux dérivées partielles du troisième ordre, puisque p, q s'expriment en fonction des dérivées premières et deuxièmes de φ par rapport à x, y, z. Ainsi donc *une famille de surfaces données ne peut en général faire partie d'un système triple orthogonal.* Si la condition (3) est réalisée, la fonction $\psi(x, y, z)$ est déterminée à une fonction arbitraire près, et nous avons une deuxième famille de surfaces dont chacune coupe à angle droit chacune des surfaces (S) de la famille $\varphi(x, y, z) =$ const. suivant une ligne de courbure de cette surface (S). Et, d'après le théorème de Joachimsthal, l'intersection de chaque surface (S_1) de cette seconde famille avec chaque surface (S) de la première est aussi ligne de courbure sur (S_1).

En résumé nous avons deux familles de surfaces

$$\text{(S)} \qquad \varphi(x, y, z) = \text{const.}$$
$$(\text{S}_1) \qquad \psi(x, y, z) = \text{const.}$$

qui se coupent orthogonalement suivant des courbes qui sont lignes de courbure à la fois pour les deux surfaces qui s'y croisent. Et il reste à étudier si l'on peut déterminer une troisième famille de surfaces

$$(\text{S}_2) \qquad \chi(x, y, z) = \text{const.}$$

qui constitue avec les deux premières un système triple orthogonal, c'est-à-dire à étudier le système d'équations linéaires aux dérivées partielles dont dépend la fonction inconnue χ :

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right.$$

Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} \text{A}f &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z},\\ \text{B}f &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}; \end{aligned}$$

et, d'après la théorie des systèmes complets d'équations linéaires, la condition nécessaire et suffisante pour l'intégrabilité du système (4) est que l'équation :

$$\left(\text{A}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \text{B}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial\chi}{\partial x} + \left(\text{A}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \text{B}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y} + \left(\text{A}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \text{B}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial\chi}{\partial z} = 0$$

soit une conséquence algébrique des équations (4), c'est-à-dire que l'on ait :

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \text{A}\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - \text{B}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\\ \text{A}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} - \text{B}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\\ \text{A}\dfrac{\partial\psi}{\partial z} - \text{B}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition se simplifie. Remarquons en effet que

$$\begin{aligned} \text{A}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \text{B}\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial x}\\ &\quad + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on a, à cause de l'orthogonalité des surfaces (S) et (S_1),

$$\mathrm{A}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\mathrm{B}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0.$$

On voit de même que l'on a aussi

$$\mathrm{A}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\mathrm{B}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\qquad \mathrm{A}\frac{\partial\psi}{\partial z}+\mathrm{B}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

Par suite, la condition (4) peut s'écrire simplement

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}\dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\\ \mathrm{A}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\\ \mathrm{A}\dfrac{\partial\psi}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix}=0. \tag{6}$$

Or, pour une valeur quelconque de x, y, z, les dérivées $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \dfrac{\partial\psi}{\partial z}$ sont les coefficients de direction l, m, n de la normale à la surface (S_1) qui passe par le point de coordonnées x, y, z ; et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ sont les coefficients de direction de la normale à la surface (S) qui passe par ce même point, c'est-à-dire de la tangente à une ligne de courbure de (S_1) ; en désignant par dx, dy, dz un déplacement effectué suivant la direction de cette tangente, on aura donc

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{dz}=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{dy}=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}{dx}=\frac{\mathrm{A}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{dl}=\frac{\mathrm{A}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}}{dm}=\frac{\mathrm{A}\dfrac{\partial\psi}{\partial z}}{dn},$$

et la condition (6) deviendra :

$$\begin{vmatrix} dl & dx & l\\ dm & dy & m\\ dn & dz & n \end{vmatrix}=0,$$

ce qui est une identité puisque la différentiation d considérée a lieu suivait une ligne de courbure.

La condition d'intégrabilité du système (4) est donc remplie, et la troisième famille (S_2) existe toujours et est entièrement déterminée. On peut donc énoncer les résultats suivants :

1°. *Il existe une équation aux dérivées partielles du troisième ordre (l'équation* (3)) *qui exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* $\varphi(x, y, z)$ *fournisse une famille de surfaces* (S) *faisant partie d'un système triple orthogonal. Si la famille* (S) *est donnée, les deux autres familles* (S_1) *et* (S_2) *sont entièrement déterminées.*

2°. *Pour que deux familles de surfaces,* (S) *et* (S_1)*, fassent partie d'un système triple orthogonal, il faut et il suffit qu'elles se coupent à angle droit, et* *que les intersections soient lignes de courbure sur les surfaces* (S), *ou sur les surfaces* (S_1).

On peut remarquer enfin, que si l'on connaît les lignes de courbure (C_1) des surfaces (S_1) par exemple, qui ne sont pas les intersections des surfaces (S_1) et des surfaces (S), et les lignes de courbure (C) d'une seule surface (S), chaque surface (S_2) sera engendrée par les courbes (C_1) qui s'appuient sur une même courbe (C).

Systèmes triples orthogonaux contenant une surface.

3. Cherchons maintenant si une surface donnée peut faire partie d'un système triple orthogonal. Traçons sur cette surface les lignes de courbure, et menons les normales à la surface en tous les points de ces lignes, elles engendrent deux familles de développables orthogonales à la surface donnée. En adjoignant à cette surface les surfaces parallèles, on a un système triple orthogonal.

Remarque 1. Les surfaces parallèles à une surface (S) en dérivent par une transformation de contact définie par l'équation

$$(\mathrm{X} - x)^2 + (\mathrm{Y} - y)^2 + (\mathrm{Z} - z)^2 - r^2 = 0,$$

où r est une constante arbitraire ; en effet la surface parallèle est l'enveloppe d'une famille de sphères de rayon constant ayant leurs centres sur la surface (S). Cette transformation de contact s'appelle dilatation.

Remarque 2. Lorsqu'on sait qu'une famille de surfaces appartient à un système triple orthogonal, on peut sur chacune de ces surfaces déterminer les lignes de courbure, et les autres familles du système sont engendrées par les trajectoires orthogonales des surfaces qui s'appuient sur les lignes de courbure. Dans le cas particulier d'une famille de surfaces parallèles, les trajectoires orthogonales sont les normales à ces surfaces.

Systèmes triples orthogonaux contenant une famille de plans.

4. Considérons une famille de plans P ; les trajectoires orthogonales s'obtiennent, comme on l'a vu à propos des surfaces moulures, en faisant rouler un plan mobile sur la développable enveloppe des plans P. Prenons dans le plan deux systèmes de courbes orthogonales, ce qui est toujours possible, car si nous nous donnons l'un des systèmes

$$\varphi(x, y) = a,$$

l'autre se détermine par l'intégration de l'équation

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}.$$

On peut engendrer les autres familles du système triple orthogonal au moyen de ces courbes des plans P, assujetties à rencontrer les trajectoires orthogonales ; ces familles sont ainsi constituées de surfaces moulures. On peut ainsi, au moyen du Théorème de Dupin, retrouver leurs lignes de courbure.

Systèmes triples orthogonaux contenant une famille de sphères.

5. Le fait que toute famille de plans fait partie d'un système triple orthogonal tient au fond à ce que toute courbe d'un plan est ligne de courbure du plan ; de sorte qu'une famille de surfaces orthogonales aux plans donnés satisfera à la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une troisième famille complétant le système triple orthogonal.

Le même fait sera donc vrai aussi pour une famille de sphères. Et pour construire un système triple orthogonal quelconque contenant la famille de sphères (S) donnée, il suffira : 1°. de prendre sur une des sphères deux familles de courbes $(\mathrm{C}), (\mathrm{C}_1)$ orthogonales ; 2°. de déterminer les trajectoires orthogonales (T) des sphères (S). Car alors les courbes (T) qui s'appuient sur les courbes (C), et les courbes (T) qui s'appuient sur les courbes (C_1) engendreront les surfaces des deux familles (S_1) et (S_2) formant avec les sphères (S) le système triple cherché.

Tout revient donc à résoudre les deux problèmes suivants : 1°. déterminer sur une sphère un système orthogonal quelconque ; 2°. déterminer les trajectoires orthogonales d'une famille de sphères.

Le premier problème se ramène immédiatement au problème analogue dans le plan au moyen d'une projection stéréographique.

Étudions donc le second :

Si nous considérons deux sphères de la famille, les trajectoires orthogonales établissent entre elles une correspondance point par point, et cette correspondance d'après ce qui précède, sera telle qu'à un système orthogonal sur l'une des sphères corresponde un système orthogonal sur l'autre. Or, deux directions rectangulaires sont conjuguées harmoniques par rapport aux directions isotropes, et dans une transformation ponctuelle quelconque, le rapport anharmonique des tangentes est un invariant, donc les directions isotropes se transforment en directions isotropes, les génératrices rectilignes de l'une des sphères se transforment en génératrices rectilignes de l'autre ; et le rapport anharmonique de deux directions quelconques avec les directions isotropes restant constant, les angles se conservent ; la transformation est conforme.

Soit alors

$$\sum (x - x_0)^2 - \mathrm{R}^2 = 0,$$

l'équation générale des sphères considérées, dépendant d'un paramètre t.

Les considérations précédentes nous conduisent à introduire les génératrices rectilignes. On posera donc :

$$\begin{aligned} x - x_0 + i(y - y_0) &= \lambda\big[(z - z_0) + \mathrm{R}\big], \\ x - x_0 - i(y - y_0) &= \frac{-1}{\lambda}\big[(z - z_0) - \mathrm{R}\big] = \mu\big[z - z_0 + \mathrm{R}\big]; \end{aligned}$$

d'où :

$$(z - z_0)\left(\mu + \frac{1}{\lambda}\right) = \mathrm{R}\left(\frac{1}{\lambda} - \mu\right), \qquad z - z_0 = \mathrm{R}\,\frac{1 - \lambda\mu}{1 + \lambda\mu},$$
$$x - x_0 + i(y - y_0) = \frac{2\mathrm{R}\lambda}{1 + \lambda\mu},$$
$$x - x_0 - i(y - y_0) = \frac{2\mathrm{R}\mu}{1 + \lambda\mu}.$$

Les équations différentielles à des trajectoires orthogonales sont :

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0} = \frac{d(x + iy)}{x - x_0 + i(y - y_0)} = \frac{d(x - iy)}{x - x_0 - i(y - y_0)}.$$

En égalant le troisième rapport successivement aux deux derniers, et posant :

$$d\mathrm{A} = \frac{d(x_0 + iy_0)}{2\mathrm{R}}, \qquad d\mathrm{B} = \frac{d(x_0 - iy_0)}{2\mathrm{R}}, \qquad d\mathrm{C} = \frac{dz_0}{2\mathrm{R}},$$

on obtient deux équations de Riccati

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda^2\frac{d\mathrm{B}}{dt} - 2\lambda\frac{d\mathrm{C}}{dt} - \frac{d\mathrm{A}}{dt}, \qquad \frac{d\mu}{dt} = \mu^2\frac{d\mathrm{A}}{dt} - 2\mu\frac{d\mathrm{C}}{dt} - \frac{d\mathrm{B}}{dt}.$$

Si on connaît une trajectoire orthogonale, on a une solution de chaque équation, et la résolution du problème est ramenée à deux quadratures. Pour deux trajectoires orthogonales, on n'a plus qu'une seule quadrature, et pour trois trajectoires orthogonales, le problème s'achève sans quadrature. On a alors, comme intégrale générale de la première équation :

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} : \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{\lambda^0 - \lambda_1^0}{\lambda^0 - \lambda_2^0} : \frac{\lambda_3^0 - \lambda_1^0}{\lambda_3^0 - \lambda_2^0},$$

en désignant par l'indice zéro les valeurs qui correspondent à $t = t_0$. C'est donc une relation de la forme :

$$\lambda = \frac{\mathrm{M}\lambda^0 + \mathrm{N}}{\mathrm{P}\lambda^0 + \mathrm{Q}}.$$

On aura de même, pour la seconde équation de Riccati, une intégrale de la forme

$$\mu = \frac{\mathrm{R}\mu^0 + \mathrm{S}}{\mathrm{T}\mu^0 + \mathrm{U}};$$

et ces deux formules définissent la correspondance établie par les trajectoires orthogonales entre la sphère qui correspond à la valeur t_0 du paramètre, et la sphère qui correspond à la valeur t du paramètre.

On reconnaît alors que cette transformation change les cercles d'une des sphères en cercles de l'autre ; et par projection stéréographique elle deviendrait une des transformations planes du groupe des des transformations par rayons vecteurs réciproques.

Systèmes triples orthogonaux particuliers.

6. Rappelons comme systèmes triples orthogonaux particuliers, le système des quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}-1=0;$$

et le système des cyclides du quatrième degré homofocales

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}+\frac{(x^2+y^2+z^2-\mathrm{R}^2)^2}{4\mathrm{R}^2(d-\lambda)}-\frac{(x^2+y^2+z^2+\mathrm{R}^2)^2}{4\mathrm{R}^2(e-\lambda)}=0.$$

On vérifie qu'on obtient un autre système, formé de cyclides de Dupin du troisième degré, en considérant les surfaces lieux des points de contact des plans tangents menés, par un point d'un des axes, à une famille de quadriques homofocales.

EXERCICES.

53. On considère une famille de ∞^1 paraboloïdes P ayant mêmes plans principaux. Comment faut-il choisir ces paraboloïdes pour que la congruence des génératrices rectilignes d'un même système de tous ces paraboloïdes soit une congruence de normales ? Montrer qu'alors les paraboloïdes P constituent l'une des trois familles d'un système triple orthogonal et trouver les deux autres familles. Montrer qu'on peut choisir les paraboloïdes P plus particulièrement de manière que l'une de ces autres familles soit encore formée de paraboloïdes ; et donner, dans ce cas, la signification géométrique des deux familles de paraboloïdes.

CHAPITRE XIII.

CONGRUENCES DE SPHÈRES ET SYSTÈMES CYCLIQUES.

Généralités.

1. Nous appellerons *congruence de sphères* une famille de ∞^2 sphères (Σ)

$$\sum (x-f)^2 - r^2 = 0, \tag{1}$$

f, g, h, r étant fonctions de deux paramètres u, v. Le lieu des centres de ces sphères est une surface (S)

$$x = f(u,v), \qquad y = g(u,v), \qquad r = h(u,v).$$

Cherchons l'enveloppe de ces sphères. A l'équation (1) nous devrons adjoindre les deux équations

$$\sum (x-f)\frac{\partial f}{\partial u} + r\frac{\partial r}{\partial u} = 0, \qquad \sum (x-f)\frac{\partial f}{\partial v} + r\frac{\partial r}{\partial v} = 0. \tag{2}$$

Ces équations (2) représentent une droite, donc l'enveloppe des sphères (Σ) touche chacune de ces sphères en deux points, que l'on appelle *points focaux* ; l'enveloppe, que l'on appellera *surface focale*, se décompose donc en deux nappes $(F_1), (F_2)$.

Considérons dans la congruence (1) une famille de ∞^1 sphères (Σ) ; il suffit de définir u, v en fonction d'un paramètre t ; ces sphères admettent une enveloppe, qui touche chacune d'elles le long d'un cercle caractéristique ayant pour plan

$$\sum (x-f)\, df + r\, dr = 0; \tag{3}$$

lorsque les expressions de u, v en fonction de t varient, tous ces cercles caractéristiques passent par deux points fixes, qui sont les points focaux de la sphère considérée. Les enveloppes ainsi obtenues correspondent aux surfaces réglées des congruences de droites ; on peut les appeler *surfaces canaux* de la congruence (1).

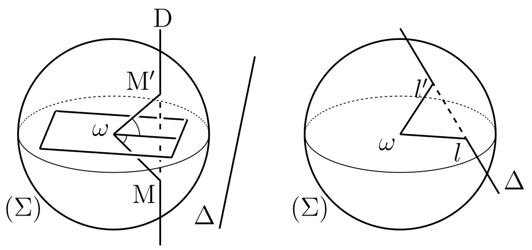
Cherchons parmi ces surfaces canaux celles pour lesquelles chaque sphère est tangente à la sphère infiniment voisine. Ce sont en réalité des surfaces réglées à génératrices isotropes. Le cercle défini par les équations (1), (3) doit se réduire à un couple de droites isotropes ; le plan (3) est tangent à la sphère (1). Ce qui donne la condition

$$\sum df^2 - dr^2 = 0, \tag{4}$$

équation différentielle du premire ordre et du deuxième degré ; il y a donc deux familles de sphères spéciales, le point de contact de l'une d'elles avec la sphère infiniment voisine étant défini par

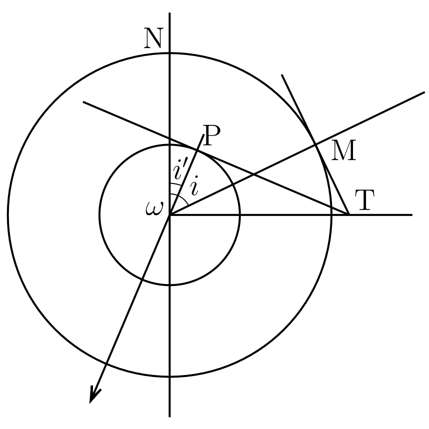
$$\frac{x-f}{df} = \frac{y-g}{dg} = \frac{z-h}{dh} = \frac{-r}{dr}, \tag{5}$$

df, dg, dh sont les coefficients de direction du rayon du point de contact.



L'équation (4) définit sur la surface (S) deux directions $\omega l, \omega l'$; soient M, M' les points de contact de la sphère (Σ) correspondante avec la surface focale (F) ; la droite MM' est représentée par les deux équations (2), ou encore, puisque les points M, M' sont sur tous les cercles caractéristiques, par les deux équations (3). qui correspondent aux enveloppes spéciales ; or, dans ce cas l'équation (3) représente le plan tangent à la sphère en l'un des points I, I' ; donc les droites $\mathrm{II}', \mathrm{MM}'$ sont polaires réciproques par rapport à la sphère (Σ). Si nous supposons cette sphère réelle, et si les points M, M' sont réels, I, I' sont imaginaires ; et inversement. Nous désignerons par D la droite MM', et par Δ la droite ll' ; $\omega l, \omega l'$ sont dans le plan tangent en ω à la surface (S) ; MM' est perpendiculaire à ce plan tangent ; les points M, M', et par suite les droites $\omega\mathrm{M}, \omega\mathrm{M}'$ sont symétriques par rapport à ce plan tangent.

Si nous remarquons maintenant que $\omega\mathrm{M}$ est normale à la première nappe de la surface focale, et $\omega\mathrm{M}'$ normale à la deuxième, nous voyons que l'on peut considérer $\omega\mathrm{M}$ comme rayon incident, $\omega\mathrm{M}'$ comme rayon réfléchi sur la surface (S), et par suite, nous avons une congruence de normales qui se réfléchit sur la surface (S) suivant une congruence de normales. La surface (S) étant quelconque, donnons-nous une surface (F_1) ; nous pourrons toujours considérer les sphères ayant leurs centres sur (S) et tangentes à (F_1) ; (F_1) sera l'une des nappes focales de la congruence de sphères ainsi obtenues, et la congruence des normales à (F_1) se réfléchira sur (S) suivant la congruence des normales à (F_2) deuxième nappe focale. D'où le *Théorème de Malus : Les rayons normaux à une surface quelconque se réfléchissent sur une surface quelconque suivant les normales à une nouvelle surface.*



Ce Théorème peut s'étendre aux rayons réfractés. Reprenons la construction d'Huygens. Considérons une sphère de centre ω ; soit $\omega\mathrm{M}$ le rayon incident, et la normale $\omega\mathrm{N}$ à la surface réfléchissante. Construisons une deuxième sphère de centre ω et dont le rayon soit dans le rapport n avec le rayon de la première. Considérons le plan tangent $\omega\mathrm{T}$ à la surface réfléchissante. Au point M où le rayon incident rencontre la première sphère menons le plan tangent à cette sphère, qui rencontre le plan ωl suivant la droite T, et par la droite T menons le plan TP tangent à la deuxième sphère. En appelant i, i' les angles de $\omega\mathrm{M}$ et $\omega\mathrm{P}$ avec $\omega\mathrm{N}$, on a immédiatement

$$\omega\mathrm{T} = \frac{\omega\mathrm{M}}{\sin i} = \frac{\omega\mathrm{P}}{\sin i'},$$

d'où

$$\frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{\omega\mathrm{P}}{\omega\mathrm{M}} = n,$$

ωP est le rayon réfracté. Partons alors d'une congruence de normales, soit (F_1) la surface normale ; pour construire les rayons réfractés, il faut considérer les sphères (Σ') concentriques à (Σ) et de rayon nr ; les points I, I' sont définis par les équations (5) ; or, ces équations ne changent pas lorsqu'on remplace r par nr, la droite II' est la même que précédemment, et le Théorème s'étend à la réfraction.

Congruences spéciales.

2. A la congruence de sphères considérée nous avons associé quatre congruences de droites : celle des droites ωM normales à (F_1), celles des droites $\omega M'$ normales à (F_2) celle des droites Δ, et celle des droites D.

Supposons MM' confondus ; ils sont confondus aussi avec II' ; les deux nappes focales sont confondues ; alors le lieu des points I, I' confondus est une ligne de courbure de la surface (F) et la sphère (Σ) est la sphère de courbure correspondante. *La congruence de sphères est alors constituée par des sphères de courbure d'une même surface* (F).

Réciproquement. Soit une surface (F) et ses sphères de courbure d'une même famille, la surface (F) est surface focale double de la congruence de ces sphères de courbure.

Toutes les congruences de droites considérées se réduisent ici à 2, celle des droites D tangentes à une famille de lignes de courbure, et celle des droites Δ tangentes à l'autre famille. La surface (S) est alors l'une des nappes de la développée de la surface focale double. Aux lignes de courbure intégrales de (4) correspond sur la surface (S) une famille de géodésiques. On est ainsi conduit à la détermination des géodésiques de (S) en écrivant que l'équation (4) a une racine double en du, dv. Cette équation s'écrit

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial u}\,du + \frac{\partial r}{\partial v}\,dv\right)^2 = 0,$$
$$\left[\mathrm{E} - \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + 2\left[\mathrm{F} - \frac{\partial r}{\partial u}\,\frac{\partial r}{\partial v}\right] du\,dv + \left[\mathrm{G} - \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2\right] dv^2 = 0,$$

pour qu'il y ait une racine double, il faut que

$$\left[\mathrm{E} - \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\right]\left[\mathrm{G} - \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2\right] - \left[\mathrm{F} - \frac{\partial r}{\partial u}\,\frac{\partial r}{\partial v}\right]^2 = 0,$$

ou

$$\mathrm{H}^2 - \left[\mathrm{E}\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 - 2\mathrm{F}\frac{\partial r}{\partial u}\,\frac{\partial r}{\partial v} + \mathrm{G}\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\right] = 0,$$

équation aux dérivées partielles qui détermine r. Ayant r on obtient la famille de géodésiques correspondante par l'intégration d'une équation différentielle ordinaire.

Théorème de Dupin.

3. Supposons que la surface focale ait ses deux nappes distinctes, et cherchons ses lignes de courbure. Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de ωM.

$$\lambda = \frac{x-f}{r}, \qquad \mu = \frac{y-g}{r}, \qquad \nu = \frac{z-h}{r};$$

d'où

$$x = f + \lambda r, \qquad y = g + \mu r, \qquad z = h + \nu r.$$

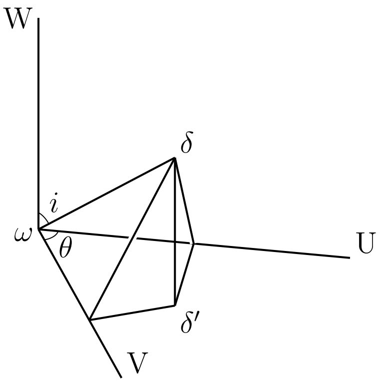
Portons ces valeurs de x, y, z dans les équations (2), elles deviennent

$$(6) \qquad \sum \lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial u} = 0, \qquad \sum \lambda \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial v} = 0.$$

Soient i, i' les angles de ωM et ωM$'$ avec ωN, ces angles sont supplémentaires, $\cos i' = -\cos i$; si l, m, n sont les cosinus directeurs de ωN, on a

$$(7) \qquad \sum \lambda l - \cos i = 0.$$

Calculons $\cos i$. Dans le plan tangent à (S) soient ωU, ωV les tangentes aux courbes $v =$ const., $u =$ const.



Les cosinus directeurs de ωU sont

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial h}{\partial u};$$

ceux de ωV sont

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial f}{\partial v}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial g}{\partial v}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial h}{\partial v}.$$

Soit $\omega\delta$ le segment directeur de ωM, ses projections orthogonales sur ωU, ωV sont :

$$\mathrm{A} = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial r}{\partial u}, \qquad \mathrm{B} = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial r}{\partial v},$$

sa projection sur ωW est $\cos i$. Soit θ l'angle de ωU et ωV :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}.$$

Soient U, V les coordonnées par rapport à ωU, ωV de la projection δ' de δ sur le plan tangent ; elles sont données par les équations

$$\mathrm{U}\cos\theta + \mathrm{V} = \mathrm{B}, \qquad \mathrm{U} + \mathrm{V}\cos\theta = \mathrm{A};$$

d'où

$$\mathrm{U}\sin^2\theta = \mathrm{A} - \mathrm{B}\cos\theta, \qquad \mathrm{V}\sin^2\theta = \mathrm{B} - \mathrm{A}\cos\theta;$$

d'où encore

$$\begin{aligned}\sin^4\theta\big[\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + 2\mathrm{UV}\cos\theta\big]\\ = (\mathrm{A} - \mathrm{B}\cos\theta)^2 + (\mathrm{B} - \mathrm{A}\cos\theta)^2 + 2\cos\theta(\mathrm{A} - \mathrm{B}\cos\theta)(\mathrm{B} - \mathrm{A}\cos\theta),\end{aligned}$$

ou

$$\sin^2\theta\big[\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2+2\mathrm{UV}\cos\theta\big]=\mathrm{A}^2-2\mathrm{AB}\cos\theta+\mathrm{B}^2.$$

Donc

$$\omega\delta'^2=\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2+2\mathrm{UV}\cos\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}\big[\mathrm{A}^2-2\mathrm{AB}\cos\theta+\mathrm{B}^2\big],$$

et

$$1=\overline{\omega\delta}^2=\overline{\omega\delta'}^2+\cos^2 i=\cos^2 i+\frac{1}{\sin^2\theta}\big[\mathrm{A}^2-2\mathrm{AB}\cos\theta+\mathrm{B}^2\big].$$

Or,

$$\mathrm{A}^2-2\mathrm{AB}\cos\theta+\mathrm{B}^2=\frac{1}{\mathrm{H}^2}\,\Phi\left(\frac{\partial r}{\partial v},-\frac{\partial r}{\partial u}\right),$$

d'où la formule

$$\sin^2 i=\frac{1}{\mathrm{H}^2}\,\Phi\left(\frac{\partial r}{\partial v},-\frac{\partial r}{\partial u}\right).$$

Ceci posé, les lignes de courbure de la surface focale sont définies par l'équation

$$\begin{vmatrix} dx & \lambda & d\lambda\end{vmatrix}=0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} df+\lambda\,dr+r\,d\lambda & \lambda & d\lambda\end{vmatrix}=0;$$

qui se réduit à

$$\begin{vmatrix} df & \lambda & d\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Multiplions par le déterminant $\begin{vmatrix}\lambda & \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\end{vmatrix}$ qui n'est pas nul, la normale n'étant pas dans le plan tangent. L'équation devient

$$\begin{vmatrix}
\sum\lambda\,df & \sum\lambda^2 & \sum\lambda\,d\lambda\\
\sum\dfrac{\partial f}{\partial u}\,df & \sum\lambda\dfrac{\partial f}{\partial u} & \sum\dfrac{\partial f}{\partial u}\,d\lambda\\
\sum\dfrac{\partial f}{\partial v}\,df & \sum\lambda\dfrac{\partial f}{\partial v} & \sum\dfrac{\partial f}{\partial v}\,d\lambda
\end{vmatrix}=0,$$

ou, en tenant compte de (6)

$$\begin{vmatrix}
-dr & 1 & 0\\
\sum\dfrac{\partial f}{\partial u}\,df & -\dfrac{\partial r}{\partial u} & \sum\dfrac{\partial f}{\partial u}\,d\lambda\\
\sum\dfrac{\partial f}{\partial v}\,df & -\dfrac{\partial r}{\partial v} & \sum\dfrac{\partial f}{\partial v}\,d\lambda
\end{vmatrix}=0.$$

Multiplions la première ligne par $\dfrac{\partial r}{\partial u}$ et ajoutons à la deuxième, puis par $\dfrac{\partial r}{\partial v}$ et ajoutons à la troisième. Nous obtenons

$$\begin{vmatrix}
\sum\dfrac{\partial f}{\partial u}\,df-\dfrac{\partial r}{\partial u}\,dr & \sum\dfrac{\partial f}{\partial u}\,d\lambda\\
\sum\dfrac{\partial f}{\partial v}\,df-\dfrac{\partial r}{\partial v}\,dr & \sum\dfrac{\partial f}{\partial v}\,d\lambda
\end{vmatrix}=0.$$

Les éléments de la première colonne sont les demi-dérivées partielles par rapport à du, dv de la forme quadratique

$$\sum df^2 - dr^2 = \Phi_1(du, dv),$$

qui définit le couple des droites $\omega \mathrm{I}, \omega \mathrm{I}'$. Voyons si les éléments de la deuxième colonne sont susceptibles d'une interprétation analogue. Si nous différentions (6) nous obtenons

$$\sum \frac{\partial f}{\partial u}\, d\lambda = -\sum \lambda\, d\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) - d\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right);$$

or,

$$d\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial (d^2 r)}{\partial (du)},$$

et

$$\sum \lambda\, d\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial (\sum \lambda\, d^2 f)}{\partial (du)}.$$

Posons

$$\mathcal{A} = \sum \lambda\, d^2 f, \qquad \mathcal{B} = \mathcal{A} + d^2 r$$

les différentielles secondes étant prises par rapport à u et v ; et l'équation s'écrit,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial\, du} & \dfrac{\partial \mathcal{B}}{\partial\, du} \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial\, dv} & \dfrac{\partial \mathcal{B}}{\partial\, dv} \end{vmatrix} = 0 :$$

les directions principales de (F) sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux couples $\Phi_1 = 0$ et $\mathcal{B} = 0$. Calculons $\mathcal{A}$. Pour cela, éliminons λ, μ, ν entre les équations (6), (7) et

$$\sum \lambda\, d^2 f - \mathcal{A} = 0;$$

nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & 1 & d^2 f \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial r}{\partial u} & \dfrac{\partial r}{\partial v} & -\cos i & -\mathcal{A} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne en développant

$$\mathcal{A}\mathrm{H} + \mathrm{H} \cos i \Psi(du, dv) + \mathrm{H}\chi(du, dv) = 0;$$

et :

$$\mathcal{B} = d^2 r - \cos i \Psi(du, dv) - \chi(du, dv) = -\Psi_1(du, dv) - \cos i \Psi(du, dv).$$

Les lignes de courbure de la deuxième nappe sont tangentes aux directions conjuguées par rapport à $\Phi_1 = 0$ et

$$\mathcal{B}_1 = -\Psi_1(du, dv) + \Psi(du, dv) = 0;$$

pour que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes, il faut et il suffit que le couple des directions principales soit conjugué par rapport aux trois couples

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Psi_1 - \cos i\Psi = 0, \qquad \Psi_1 + \cos i\Psi = 0,$$

ou par rapport aux couples

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Psi_1 = 0, \qquad \Psi = 0.$$

Étant conjuguées par rapport à $\Psi = 0$, elles correspondent à des lignes conjuguées sur (S), d'où le *Théorème de Dupin* : si les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes focales, les développables des normales correspondantes coupent la surface (S) suivant le même réseau conjugué ; et *réciproquement.* Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que les développables d'une congruence de normales se réfléchissent sur une surface suivant des développables est qu'elles déterminent sur la surface un réseau conjugué.*

Congruence des droites D.

4. Cherchons les développables de la congruence des droites D ; elles sont définies par l'équation

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ l & m & n \\ dl & dm & dn \end{vmatrix} = 0;$$

or

$$x = f + r\lambda, \qquad y = g + r\mu, \qquad z = h + r\nu,$$

et l'équation devient

$$\begin{vmatrix} df + r\,d\lambda + \lambda\,dr & l & dl \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions le premier membre par le déterminant non nul

$$\begin{vmatrix} l & \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}$$

nous avons :

$$\begin{vmatrix} r\sum l\,d\lambda + dr\sum \lambda l & 1 & 0 \\ \sum \dfrac{\partial f}{\partial u}\,df + r\sum \dfrac{\partial f}{\partial u}\,d\lambda + dr\sum \lambda\dfrac{\partial f}{\partial u} & 0 & \sum \dfrac{\partial f}{\partial u}\,dl \\ \sum \dfrac{\partial f}{\partial v}\,df + r\sum \dfrac{\partial f}{\partial v}\,d\lambda + dr\sum \lambda\dfrac{\partial f}{\partial v} & 0 & \sum \dfrac{\partial f}{\partial v}\,dl \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \sum \dfrac{\partial f}{\partial u}\,df + r\sum \dfrac{\partial f}{\partial u}\,d\lambda + dr\sum \lambda\dfrac{\partial f}{\partial u} & \sum \dfrac{\partial f}{\partial u}\,dl \\ \sum \dfrac{\partial f}{\partial v}\,df + r\sum \dfrac{\partial f}{\partial v}\,d\lambda + dr\sum \lambda\dfrac{\partial f}{\partial v} & \sum \dfrac{\partial f}{\partial v}\,dl \end{vmatrix} = 0.$$

Les éléments de la dernière colonne sont les demi-dérivées partielles par rapport à du, dv de la forme $\Psi(du, dv) = -\sum df\, dl$. Quant aux éléments de la première ligne, remarquons que

$$\sum \frac{\partial f}{\partial u}\, d\lambda = \frac{1}{2}\, \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial u}, \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial v}\, d\lambda = \frac{1}{2}\, \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial v},$$

où

$$\mathcal{B} = -\Psi_1 - \cos i\, \Psi.$$

Enfin, si nous remarquons que les points M, M' sont définis par les relations :

$$\sum \lambda\, \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial u} = 0, \qquad \sum \lambda\, \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial v} = 0,$$

nous avons :

$$\sum \frac{\partial f}{\partial u}\, df + dr \sum \lambda\, \frac{\partial f}{\partial u} = \sum \frac{\partial f}{\partial u}\, df - \frac{\partial r}{\partial u}\, dr = \frac{1}{2}\, \frac{d\Phi_1}{\partial\, du}, \quad \text{et l'analogue;}$$

de sorte que les éléments de la première colonne sont les demi-dérivées partielles par rapport à du, dv de la forme $\Phi_1 - r(\Psi_1 + \Psi \cos i)$.

Les développables de la congruence correspondent sur la surface (S) *aux directions conjuguées par rapport à*

$$\Psi = 0, \qquad \Phi_1 - r[\Psi_1 + \Psi \cos i] = 0,$$

ou par rapport à

$$\Psi = 0, \qquad \Phi_1 - r\Psi_1 = 0;$$

le résultat ne change pas si on change i en $\pi - i$, et les développables de la congruence des droites D correspondent sur la surface (S) à un réseau conjugué.

Considérons les plans focaux ; un plan focal est parallèle à la direction l, m, n, et à la direction dl, dm, dn. Mais

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

d'où

$$l\, dl + m\, dm + n\, dn = 0;$$

dl, dm, dn correspondent à la direction du plan focal parallèle au plan tangent à la surface. Or, les deux directions correspondant aux deux plans focaux, donc aux deux développables, étant conjuguées, on a

$$\sum dl\, \delta f = 0;$$

le plan focal est perpendiculaire à la direction $\delta f, \delta g, \delta h$ qui correspond à l'autre plan focal. *Chaque plan focal est perpendiculaire à la direction de la surface* (S) *correspondant à l'une des développables.*

Congruence des droites Δ.

5. La droite Δ est l'intersection des plans tangents à la sphère en M et à la surface (S) en ω

$$\sum \lambda\,(\mathrm{X}-f)-r=0, \qquad \sum l\,(\mathrm{X}-f)=0.$$

Cherchons les développables. Exprimons que la droite précédente rencontre la droite infiniment voisine. Cela donne

$$\sum d\lambda\,(\mathrm{X}-f)-\sum \lambda\,df-dr=0, \qquad \sum dl\,(\mathrm{X}-f)-\sum l\,df=0;$$

conditions qui se simplifient en remarquant que $\sum l\,df=0$, et $\sum \lambda\,df+dr=0$. Il reste :

$$\sum d\lambda(\mathrm{X}-f)=0, \qquad \sum dl(\mathrm{X}-f)=0. \tag{1}$$

Exprimons que les équations obtenues sont compatibles, nous avons l'équation qui définit les développables

$$\begin{vmatrix} l & d\lambda & dl \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Multiplions encore par le déterminant non nul

$$\begin{vmatrix} l & \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\end{vmatrix},$$

nous obtenons

$$\begin{vmatrix} 1 & \sum l\,d\lambda & 0 \\ 0 & \sum d\lambda\,\dfrac{\partial f}{\partial u} & \sum dl\,\dfrac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & \sum d\lambda\,\dfrac{\partial f}{\partial v} & \sum dl\,\dfrac{\partial f}{\partial v}\end{vmatrix}=0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \sum \dfrac{\partial f}{\partial u}\,d\lambda & \sum \dfrac{\partial f}{\partial u}\,dl \\ \sum \dfrac{\partial f}{\partial v}\,d\lambda & \sum \dfrac{\partial f}{\partial v}\,dl \end{vmatrix}=0;$$

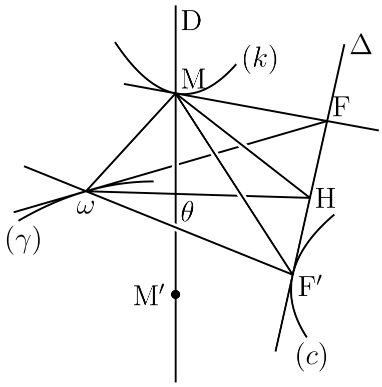
les éléments de la première colonne sont les demi-dérivées partielles par rapport à du, dv de la forme $\mathcal{B}=-\Psi_1-\Psi\cos i$. Ceux de la deuxième colonne sont les demi-dérivées partielles de Ψ. *Les développables de la congruence des droites Δ correspondent sur la surface* (S) *au réseau conjugué par rapport aux couples*

$$\Psi=0, \qquad \Psi_1=0.$$

Quant aux points focaux, ils sont définis par les équations de Δ et les équations (1), compatibles en vertu de la relation (2). On en déduit que les directions joignant ω aux points focaux sont définies par les relations

$$\sum l\,\delta f=0, \qquad \sum dl\,\delta f=0, \qquad \sum d\lambda\,\delta f=0;$$

la première exprime que ces droites sont dans le plan tangent à (S), la deuxième que ce sont les tangentes conjuguées de (S) qui correspondent aux développables.



Supposons que les deux congruences précédentes se correspondent par développables. Les deux réseaux conjugués déterminés sur la surface (S) sont confondus ; il faut alors que les trois couples $\Psi = 0$, $\Psi_1 = 0$, $\Phi_1 - r\Psi_1 = 0$, ou $\Psi = 0$, $\Psi_1 = 0$, $\Phi_1 = 0$ appartiennent à une même involution, et alors les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de la surface (F). Nous avons alors sur la surface (S) un réseau conjugué qui correspond aux développables des quatre congruences ωM, ωM′, D, Δ. Les points focaux F, F′ de Δ sont sur les tangentes aux deux courbes conjuguées qui passent par ω, les droites MF, MF′ sont les tangentes aux lignes de courbure en M de la surface (F), la droite D est perpendiculaire au plan FωF′, et ses plans focaux sont perpendiculaires à ωF et ωF′. Les développables de la congruence des droites D coupent les deux nappes de l'enveloppe (F) suivant leurs lignes de courbure.

Le système triple de Ribaucour.

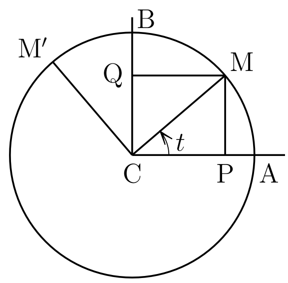
6. Plaçons-nous dans ce dernier cas ; soit (γ) une des courbes conjuguées de la surface (S) ; quand ω décrit (γ), le point M décrit une ligne de courbure (K) de la surface (F) qui sera tangente à MF, et la droite Δ enveloppe une courbe (c) lieu de F′. Considérons la sphère (σ) de centre F′ et passant par M ; cette sphère a pour enveloppe une surface canal (E) ; la sphère (σ) ayant son rayon MF′ perpendiculaire à MF est constamment tangente à la courbe (K), donc le point M est un point du cercle caractéristique (H) ; le plan de ce cercle est perpendiculaire à la droite Δ tangente à (c), son centre H sera le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur Δ ; ce cercle sera donc orthogonal à la sphère (Σ) au point M et au point M′ symétrique par rapport au plan FωF′ ; et la surface (E) est engendrée par le cercle orthogonal à la sphère (Σ) aux points M, M′ ; ce cercle tangent en M à ωM reste orthogonal à la ligne de courbure (K), or, il est ligne de courbure sur la surface (E), donc (K) est aussi ligne de courbure sur la surface (E). Si nous faisons varier (K) nous obtenons une famille de surfaces (E) qui seront toutes orthogonales à $(F_1), (F_2)$, et qui les couperont suivant leurs lignes de courbure. Si maintenant nous prenons sur (F) le deuxième système de lignes de courbure, nous devrons considérer les sphères de centres F et passant par M ; le cercle caractéristique sera encore le cercle (H) ; de plus, FM et F′M étant perpendiculaires, les sphères $(\sigma), (\sigma')$ sont orthogonales, donc aussi leurs enveloppes (E), (E′). Nous avons donc deux familles de surfaces canaux qui se coupent orthogonalement suivant des lignes de courbure, les cercles (H) ; donc elles appartiennent à un système triple orthogonal ; autrement dit les cercles (H) sont orthogonaux à une famille de surfaces, à laquelle appartiennent (F), (F′) ; et ils établissent une correspondance entre les points M, M′, donc entre les lignes de courbure de ces surfaces. Donc *lorsque les cercles* (H) *d'une congruence sont orthogonaux aux deux nappes focales* $(F_1), (F_2)$ *d'une congruence de sphères, et s'ils établissent une correspondance entre les lignes de courbure de ces deux*

nappes, ils sont orthogonaux à une infinité de surfaces sur lesquelles les lignes de courbure se correspondent ; ces surfaces appartiennent à un système triple orthogonal dont les deux autres familles sont constituées par les surfaces canaux engendrées par ceux des cercles (H) *qui s'appuient sur une des lignes de courbure de* (F_1) *ou* (F_2). De telles congruences de cercles s'appellent *systèmes cycliques.*

Congruences de cercles et systèmes cycliques.

7. Considérons une famille de ∞^2 cercles, et cherchons s'il existe des surfaces normales à tous ces cercles. Soit K l'un d'eux, $C(x_0, y_0, z_0)$ son centre, ρ son rayon, x_0, y_0, z_0, ρ étant fonctions de deux paramètres u, v. Pour définir le plan de ce cercle nous définirons deux directions rectangulaires $CA(a, b, c)$ et $CB(a', b', c')$ passant par le centre du cercle, et nous fixerons la position d'un point M sur le cercle par l'angle $(CA, CM) = t$. Les coordonnées de M par rapport au système CAB sont $\rho\cos t$, $\rho \sin t$, et ses coordonnées x, y, z sont

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \rho(a\cos t + a'\sin t) = x_0 + \rho\alpha', \\ y &= y_0 + \rho(b\cos t + b'\sin t) = y_0 + \rho\beta', \\ z &= z_0 + \rho(c\cos t + c'\sin t) = z_0 + \rho\gamma'. \end{aligned}$$



Cherchons à déterminer t de façon que la surface lieu du point correspondant admette pour normale la tangente au cercle au point M, dont nous désignerons par α, β, γ les cosinus directeurs. Nous obtenons la condition

$$\sum \alpha\, dx = 0,$$

équation aux différentielles totales des surfaces cherchées. Développons cette équation ; α, β, γ sont les projections du segment directeur de la direction CM′ correspondant à $t + \frac{\pi}{2}$

$$\alpha = -a\sin t + a'\cos t, \qquad \beta = -b\sin t + b'\cos t, \qquad \gamma = -c\sin t + c'\cos t.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} dx &= dx_0 + \alpha'\, d\rho + \rho\alpha\, dt + \rho(\cos t\, da + \sin t\, da'), \\ dy &= dy_0 + \beta'\, d\rho + \rho\beta\, dt + \rho(\cos t\, db + \sin t\, db'), \\ dz &= dz_0 + \gamma'\, d\rho + \rho\gamma\, dt + \rho(\cos t\, dc + \sin t\, dc'); \end{aligned}$$

d'où

$$\sum \alpha\, dx = \sum \alpha\, dx_0 + \rho\, dt + \rho\left[\cos t \sum \alpha\, da + \sin t \sum \alpha\, da'\right] = 0,$$
$$\sin t \sum a\, dx + \cos t \sum a'\, dx_0 + \rho\, dt + \rho\left[\cos^2 t \sum a'\, da - \sin^2 t \sum a\, da'\right] = 0.$$

Mais

$$\sum aa' = 0,$$

d'où en différentiant

$$\sum a\,da' + \sum a'\,da = 0;$$

et l'équation devient

$$-\sin t \sum a\,dx_0 + \cos t \sum a'\,dx_0 + \rho\,dt - \rho \sum a\,da' = 0,$$

$$(3) \qquad dt = \sum a\,da' + \frac{1}{\rho} \sum a\,dx_0 \sin t - \frac{1}{\rho} \sum a'\,dx_0 \cos t.$$

Posons

$$(4) \qquad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = w,$$

$$t = 2 \operatorname{arctg} w,$$

Nous obtenons

$$\frac{2\,dw}{1+w^2} = \sum a\,da' + \frac{1}{\rho} \sum a\,dx_0 \, \frac{2w}{1+w^2} - \frac{1}{\rho} \sum a'\,dx_0 \frac{1-w^2}{1+w^2},$$

ou

$$(5) \qquad 2\,dw = (1+w^2) \sum a\,da' + \frac{2w}{\rho} \sum a\,dx_0 + \frac{w^2-1}{\rho} \sum a'\,dx_0,$$

équation qui jouit de propriétés analogues à celles de l'équation de Riccati. Elle peut se mettre sous la forme

$$dw = \mathrm{A}\,du + \mathrm{A}'\,dv + w(\mathrm{B}\,du + \mathrm{B}'\,dv) + w^2(\mathrm{C}\,du + \mathrm{C}'\,dv),$$

qui se décompose en deux équations aux dérivées partielles :

$$(6) \qquad \frac{\partial w}{\partial u} = \mathrm{A} + \mathrm{B}w + \mathrm{C}w^2, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = \mathrm{A}' + \mathrm{B}'w + \mathrm{C}'w^2;$$

d'où la condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} + w\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v} + w^2\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial v} + (\mathrm{B} + 2\mathrm{C}w)(\mathrm{A}' + \mathrm{B}'w + \mathrm{C}'w^2)$$
$$- \left[\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u} + w\frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial u} + w^2\frac{\partial \mathrm{C}'}{\partial u}\right] - (\mathrm{B}' + 2\mathrm{C}'w)(\mathrm{A} + \mathrm{B}w + \mathrm{C}w^2) = 0.$$

Toute intégrale du système (6) satisfait à cette condition, qui est de la forme

$$\mathrm{L} + \mathrm{M}w + \mathrm{N}w^2 = 0.$$

Si cette condition n'est pas identiquement satisfaite, il ne peut y avoir d'autres solutions que celles de l'équation précédente, qui en admet deux. Si l'on veut qu'il y en ait une infinité, cette condition doit être identiquement satisfaite, et comme elle est du deuxième degré, il suffit qu'elle soit satisfaite par trois fonctions. Les conditions pour qu'il en soit ainsi sont

$$\mathrm{L} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u} + \mathrm{BA}' - \mathrm{AB}' = 0,$$
$$\mathrm{M} = \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial u} + 2(\mathrm{CA}' - \mathrm{AC}') = 0,$$
$$\mathrm{N} = \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{C}'}{\partial u} + \mathrm{CB}' - \mathrm{BC}' = 0.$$

Si les cercles sont normaux à trois surfaces, ils sont normaux à une infinité de surfaces.

Il est facile de construire des cercles normaux à deux surfaces, car il existe des sphères tangentes aux deux surfaces, et les cercles orthogonaux à ces sphères aux points de contact sont normaux aux deux surfaces. Si les lignes de courbure se correspondent sur les deux surfaces, on a un système cyclique, système de cercles normaux à ∞^1 surfaces. Réciproquement, supposons deux surfaces normales aux cercles, les conditions d'intégrabilité se réduiront à une seule ; d'autre part, si on a une enveloppe de sphères, pour exprimer que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes, on obtient aussi une seule condition. Cherchons à montrer que ces conditions sont identiques.

Supposons donc qu'il existe une surface normale à tous ces cercles, supposons qu'elle corresponde à $t = 0$, ou $w = 0$, l'équation (5) admet la solution $w = 0$, d'où la condition

$$\sum a\,da' - \frac{1}{\rho}\sum a'\,dx_0 = 0;$$

et l'équation devient

$$dw = w^2\sum a\,da' + \frac{w}{\rho}\sum a\,dx_0. \tag{7}$$

Soit $\mathrm{M}_0(x, y, z)$ le point correspondant à $t = 0$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \rho a, & y &= y_0 + \rho b, & z &= z_0 + \rho c,\\ x_0 &= x - \rho a, & y_0 &= y - \rho b, & z_0 &= z - \rho c,\\ dx_0 &= dx - \rho\,da - a\,d\rho, & dy_0 &= dy - \rho\,db - b\,d\rho, & dz_0 &= dz - \rho\,dc - c\,d\rho; \end{aligned}$$

d'où

$$\sum a\,dx_0 = \sum a\,dx - d\rho.$$

Si maintenant nous considérons la normale (l, m, n) en M_0 à (Σ), c'est la tangente au cercle, et (7) devient

$$dw = w^2\sum a\,dl + \frac{w}{\rho}\left(\sum a\,dx - d\rho\right),$$

ou

$$\frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} = w\sum a\,dl + \frac{1}{\rho}\sum a\,dx.$$

Nous introduisons ainsi la quantité

$$\rho w = r, \tag{8}$$

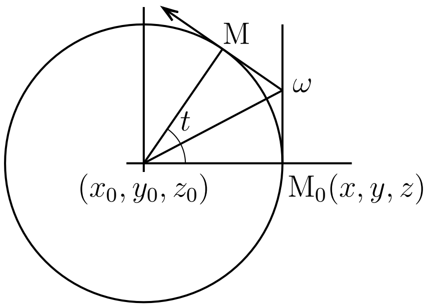
et nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r} &= \frac{r}{\rho}\sum a\,dl + \frac{1}{\rho}\sum a\,dx,\\ dr &= \frac{r^2}{\rho}\sum a\,dl + \frac{r}{\rho}\sum a\,dx. \end{aligned}$$

Or

$$r = \rho\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2},$$

ce qui montre que r est le rayon de la sphère (Σ) tangente aux surfaces lieux de M et M_0 ; son centre est le point ω intersection des tangentes au cercle en M et M_0.



Supposons maintenant qu'il existe une deuxième surface normale aux cercles. Posons

$$\frac{1}{r} = \mathrm{S}, \tag{9}$$
$$dr = -r^2\, d\mathrm{S};$$

et l'équation devient

$$-r^2\, d\mathrm{S} = \frac{r^2}{\rho}\sum a\, dl + \frac{r}{\rho}\sum a\, dx,$$
$$d\mathrm{S} + \frac{\mathrm{S}}{\rho}\sum a\, dx + \frac{1}{\rho}\sum a\, dl = 0. \tag{10}$$

Soit S_1 la solution connue

$$d\mathrm{S}_1 + \frac{\mathrm{S}_1}{\rho}\sum a\, dx + \frac{1}{\rho}\sum a\, dl = 0,$$

d'où en retranchant

$$d(\mathrm{S} - \mathrm{S}_1) + \frac{\mathrm{S} - \mathrm{S}_1}{\rho}\sum a\, dx = 0,$$
$$d\log(\mathrm{S} - \mathrm{S}_1) = -\frac{1}{\rho}\sum a\, dx. \tag{11}$$

Pour que l'équation ait d'autres intégrales, il faut que $\frac{1}{\rho}\sum a\, dx$ soit différentielle exacte. Or, nous avons

$$\frac{\partial \mathrm{S}_1}{\partial u} + \frac{\mathrm{S}_1}{\rho}\sum a\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\rho}\sum a\frac{\partial l}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{S}_1}{\partial v} + \frac{\mathrm{S}_1}{\rho}\sum a\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{1}{\rho}\sum a\frac{\partial l}{\partial v} = 0.$$

Supposons que les lignes coordonnées soient lignes de courbure. Les formules d'Olinde Rodrigues donnent

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u} &= -\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial m}{\partial u} &= -\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial n}{\partial u} &= -\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial l}{\partial v} &= -\frac{1}{\mathrm{R}'}\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial m}{\partial v} &= -\frac{1}{\mathrm{R}'}\frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial n}{\partial v} &= -\frac{1}{\mathrm{R}'}\frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

Posons

$$-\frac{1}{\mathrm{R}} = \mathrm{T}, \qquad -\frac{1}{\mathrm{R}'} = \mathrm{T}',$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u} &= \mathrm{T}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial m}{\partial u} &= \mathrm{T}\frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial n}{\partial u} &= \mathrm{T}\frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial l}{\partial v} &= \mathrm{T}'\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial m}{\partial v} &= \mathrm{T}'\frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial n}{\partial v} &= \mathrm{T}'\frac{\partial z}{\partial v}; \end{aligned}$$

Alors

$$\sum a\frac{\partial l}{\partial u} = \mathrm{T}\sum a\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \sum a\frac{\partial l}{\partial v} = \mathrm{T}'\sum a\frac{\partial x}{\partial v},$$

et les conditions pour que S_1 soit intégrale deviennent

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} + (S_1 + T)\frac{\sum a\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\rho} = 0, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial v} + (S_1 + T')\frac{\sum a\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\rho} = 0;$$

d'où

$$-\frac{1}{\rho}\sum a\,dx = \frac{1}{S_1 + T}\,\frac{\partial S_1}{\partial u}\,du + \frac{1}{S_1 + T'}\,\frac{\partial S_1}{\partial v}\,dv.$$

Exprimons que le deuxième membre est une différentielle exacte, nous aurons l'équation aux dérivées partielles des systèmes cycliques

$$(12) \qquad \Omega = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{S_1 + T}\,\frac{\partial S_1}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{S_1 + T'}\,\frac{\partial S_1}{\partial v}\right) = 0.$$

Montrons que *cette condition exprime que les lignes de courbure se correspondent sur les surfaces* M_0, M_1. D'après le Théorème de Dupin, pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que ces lignes de courbure correspondent à un réseau conjugué sur la surface lieu de ω. Soient X, Y, Z les coordonnées de ω :

$$X = x + \frac{1}{S}l, \qquad Y = y + \frac{1}{S}m, \qquad Z = z + \frac{1}{S}n;$$

pour que sur cette surface les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ forment un réseau conjugué, il faut que

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Mais

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{T}{S}\,\frac{\partial x}{\partial u} + l\frac{\partial\left(\dfrac{1}{s}\right)}{\partial u} = \left(1 + \frac{T}{S}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + l\frac{\partial\left(\dfrac{1}{s}\right)}{\partial u}, \quad \ldots, \quad \ldots,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \left(1 + \frac{T'}{S}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + l\frac{\partial\left(\dfrac{1}{s}\right)}{\partial v}, \quad \ldots, \quad \ldots;$$

relations qu'on peut encore écrire

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{S + T}{S^2}\left[S\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{S + T}\,\frac{\partial s}{\partial u}l\right], \quad \ldots, \quad \ldots,$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{S + T'}{S^2}\left[S\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{1}{S + T'}\,\frac{\partial s}{\partial v}l\right], \quad \ldots, \quad \ldots,$$

dans le déterminant (13) nous pouvons remplacer $\dfrac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v}$ par

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(M\frac{\partial X}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(N\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

à condition que $\mathrm{M} - \mathrm{N} \neq 0$; nous prendrons $\mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{S}^2}{\mathrm{S}+\mathrm{T}}$ et $\mathrm{N} = \dfrac{\mathrm{S}^2}{\mathrm{S}+\mathrm{T}'}$; nous avons alors à vérifier la relation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\mathrm{T}'}{\mathrm{S}+\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{S}+\mathrm{T}'}\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial v}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial u} - \Omega l \\ \mathrm{S}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{1}{\mathrm{S}+\mathrm{T}}\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial u}\, l \\ \mathrm{S}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} - \dfrac{1}{\mathrm{S}+\mathrm{T}'}\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial v}\, l \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions la deuxième ligne par $-\dfrac{\mathrm{S}+\mathrm{T}+\mathrm{T}'}{\mathrm{S}(\mathrm{S}+\mathrm{T}')}\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial v}$, la troisième par $\dfrac{\mathrm{S}+\mathrm{T}+\mathrm{T}'}{\mathrm{S}(\mathrm{S}+\mathrm{T})}\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial u}$ et ajoutons à la première, nous obtenons

$$\Omega \mathrm{S}^2 \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

or, le déterminant n'est pas nul, S non plus, donc $\Omega = 0$ et réciproquement. Les conditions sont identiques.

Transformation de contact de Ribaucour.

Remarque. Considérons une sphère fixe de centre ω, et les cercles (K) orthogonaux à cette sphère ; considérons une surface (S), un de ses points M, et l'élément de contact en ce point ; il y a un cercle (K) et un seul passant par M et normal en ce point à la surface (S). Donc à la surface (S) correspond une congruence de cercles qui lui sont orthogonaux ; de plus ces cercles étant orthogonaux à la sphère (ω) en deux points sont orthogonaux à trois surfaces ; ils constituent donc un système cyclique. Soient P, P' les points où le cercle (K) rencontre la sphère ; déterminons sur ce cercle le point M' tel que $(\mathrm{M}\ \mathrm{M}'\ \mathrm{P}\ \mathrm{P}') = \text{const.}$ Le lieu du point M' est une surface normale à (K), puisque l'équation (5) a mêmes propriétés que l'équation de Riccati. A l'élément de contact de la surface (S) au point M correspond ainsi un élément de contact d'une autre surface ; les lignes de courbure se correspondent sur les deux surfaces, et nous avons ainsi un groupe de transformations de contact conservant les lignes de courbure.

Ces résultats subsistent si on prend les cercles (K) normaux à un plan fixe.

Surfaces de Weingarten.

8. Nous avons considéré des congruences de sphères telles que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes focales. Aux sphères, la transformation de S. Lie fait correspondre des droites, et aux lignes de courbure correspondent les lignes asymptotiques. Nous aurons donc à considérer des congruences de droites telles que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes focales. Nous nous bornerons au cas où la congruence est une congruence

de normales, et le problème revient ainsi à chercher les surfaces telles que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la développée.

Soit donc une surface (Σ) sur laquelle nous prendrons les lignes de courbure pour lignes coordonnées ; soient l, m, n les cosinus directeurs de la normale, R, R' les rayons de courbure principaux. Les deux nappes de la développée ont pour équations

$$(\mathrm{S}) \qquad \mathrm{X} = x + \mathrm{R}l, \qquad \mathrm{Y} = y + \mathrm{R}m, \qquad \mathrm{Z} = z + \mathrm{R}n;$$
$$(\mathrm{S}') \qquad \mathrm{X}' = x + \mathrm{R}'l, \qquad \mathrm{Y}' = y + \mathrm{R}'m, \qquad \mathrm{Z}' = z + \mathrm{R}'n.$$

Cherchons les asymptotiques de $(\mathrm{S}), (\mathrm{S}')$; et exprimons que les équations différentielles en u, v sont les mêmes. Ici les lignes coordonnées formant un réseau orthogonal et conjugué, on a

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2,$$
$$\sum l\,d^2x = \mathrm{L}\,du^2 + \mathrm{N}\,dv^2;$$

et

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{E}}, \qquad \frac{1}{\mathrm{R}'} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{G}},$$

d'où

$$\sum l\,d^2x = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\,du^2 + \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{R}'}\,dv^2.$$

Les formules d'O. Rodrigues donnent

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\mathrm{R}\,\frac{\partial l}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -\mathrm{R}\,\frac{\partial m}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = -\mathrm{R}\,\frac{\partial n}{\partial u},$$

d'où

$$\frac{\partial l}{\partial u} = -\frac{1}{\mathrm{R}}\,\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial m}{\partial u} = -\frac{1}{\mathrm{R}}\,\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial n}{\partial u} = -\frac{1}{\mathrm{R}}\,\frac{\partial z}{\partial u},$$

et

$$\frac{\partial l}{\partial v} = -\frac{1}{\mathrm{R}'}\,\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial m}{\partial v} = -\frac{1}{\mathrm{R}'}\,\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial n}{\partial v} = -\frac{1}{\mathrm{R}'}\,\frac{\partial z}{\partial v};$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} d\mathrm{X} &= dx + \mathrm{R}\,dl + l\,d\mathrm{R} \\ &= \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv - \mathrm{R}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\,\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{1}{\mathrm{R}'}\,\frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + l\,d\mathrm{R} \\ &= \left(1 - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)\frac{\partial x}{\partial v}dv + l\,d\mathrm{R}, \end{aligned}$$

formules qui montrent que la normale à (S) a pour coefficients de direction $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}$.

On a donc sur cette surface (S)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)^2 \mathrm{G}\, dv^2 + d\mathrm{R}^2,$$

ce qui met en évidence sur la surface (S) une famille de géodésiques $v = \text{const.}$, et leurs trajectoires orthogonales $\mathrm{R} = \text{const.}$ L'équation différentielle des asymptotiques est

$$\sum dl\, d\mathrm{X} = 0,$$

ou

$$\sum d\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) d\mathrm{X} = 0.$$

Développons cette équation. Le coefficient de $\left(1 - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right) dv$ est

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\, d\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = du \sum \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + dv \sum \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v};$$

or on a

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} = 0;$$

d'où

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\sum \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v},$$

et

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}.$$

Le coefficient de $d\mathrm{R}$ est

$$\sum l\, d\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \sum l\, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\, du + \sum l\, \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}\, dv = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\, du,$$

d'où l'équation aux asymptotiques

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)\left[-\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\, du\, dv + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\, dv^2\right] + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\, d\mathrm{R}\, du = 0.$$

Les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ correspondent à des courbes conjuguées sur la surface (S), donc le coefficient de $du\, dv$ dans l'équation précédente est nul :

$$(1) \qquad -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\,\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} = 0;$$

et l'équation devient

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\, dv^2 + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\,\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\, du^2 = 0.$$

De même sur la surface (S') on obtiendra la condition

$$(2) \qquad -\frac{1}{2}\left(1-\frac{R'}{R}\right)\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{G}{R'}\frac{\partial R'}{\partial u}=0,$$

de sorte que l'équation aux asymptotiques de (S) peut s'écrire

$$-\frac{G}{R'^2}\frac{\partial R'}{\partial u}\,dv^2+\frac{E}{R^2}\frac{\partial R}{\partial u}\,du^2=0,$$

ou

$$G\,\frac{\partial\left(\dfrac{1}{R'}\right)}{\partial u}\,dv^2-E\,\frac{\partial\left(\dfrac{1}{R}\right)}{\partial u}\,du^2=0;$$

et de même pour (S')

$$E\,\frac{\partial\left(\dfrac{1}{R}\right)}{\partial v}\,du^2-G\,\frac{\partial\left(\dfrac{1}{R'}\right)}{\partial v}\,dv^2=0.$$

Pour que ces équations soient identiques, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{R}\right)}{\partial u} & \dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{R'}\right)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{R}\right)}{\partial v} & \dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{R'}\right)}{\partial v} \end{vmatrix}=0,$$

c'est-à-dire que $\dfrac{1}{R}$ soit fonction de $\dfrac{1}{R'}$. *Les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre* (*Ribaucour*). Ces surfaces s'appellent *surfaces de Weingarten, ou surfaces* W. Les surfaces minima en sont un cas particulier $(R+R'=0)$.

Supposons que nous partions d'une surface (W) : R' est fonction de R, et la condition (2) montre que

$$\frac{\partial \log G}{\partial u}=\Psi(R)\,\frac{\partial R}{\partial u},$$

d'où

$$\log G=\chi(R)+\theta(v),$$
$$G=e^{\chi(R)}\,e^{\theta(v)}=F(R)\,K(v);$$

et sur la développée

$$ds^2=\Theta^2(R)\,K(v)\,dv^2+dR^2.$$

Posons

$$\sqrt{K(v)}\,dv=dV,$$

nous avons

$$ds^2=dR^2+\Theta^2(R)\,dV^2,$$

forme caractéristique de l'élément d'arc des surfaces de révolution rapportées aux méridiens et aux parallèles. Si nous rapportons la méridienne à l'arc, ses équations sont

$$x = \Theta(s), \qquad y = 0, \qquad z = \Theta_1(s);$$

et celles de la surface de révolution sont

$$x = \Theta(s)\cos \mathrm{V}, \qquad y = \Theta(s)\sin \mathrm{V}, \qquad z = \Theta_1(s).$$

On voit ainsi que les développées de toute surface W *sont applicables sur des surfaces de révolution, les méridiens correspondant à une famille de géodésiques et les parallèles à leurs trajectoires orthogonales.*

Application. Supposons la surface W à courbure totale constante. En changeant d'unité on peut toujours écrire

$$\mathrm{RR}' = -1,$$
$$\mathrm{R}' = -\frac{1}{\mathrm{R}};$$

la condition (2) s'écrit

$$\left(1 + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} = -\frac{2\mathrm{G}}{\mathrm{R}}\,\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u},$$
$$\frac{\partial \log \mathrm{G}}{\partial u} = -\frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2+1}\,\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} = -\frac{\partial \log(\mathrm{R}^2+1)}{\partial u},$$
$$\mathrm{G} = \frac{1}{\mathrm{R}^2+1}\,\mathrm{K}(v),$$
$$d\mathrm{S}^2 = (\mathrm{R}^2+1)\,d\mathrm{V}^2 + d\mathrm{R}^2.$$

Posons

$$\Theta(\mathrm{R}) = \sqrt{\mathrm{R}^2+1},$$

la méridienne de la surface de révolution est donc telle que l'on ait

$$x = \sqrt{s^2+1},$$

d'où

$$s = \sqrt{x^2-1}.$$

Cherchons z.

$$dx^2 + dz^2 = ds^2 = dx^2\,\frac{x^2}{x^2-1},$$
$$dz^2 = \frac{dx^2}{x^2-1},$$
$$dz = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$z = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = e^z,$$

d'où

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = e^{-z};$$

d'où

$$x = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),$$

les deux nappes de la développée d'une surface à courbure totale constante sont applicables sur l'alysséide. c.à.d. sur la surface engendrée par une chaînette qui tourne autour de sa base.

EXERCICES.

54. Soit S une surface quelconque et Π un plan quelconque. On considère toutes les sphères U ayant leurs centres sur S et coupant le plan Π sous un angle constant φ tel que l'on ait $\cos\varphi = \frac{1}{k}$. Soit S′ la surface déduite de S en réduisant les ordonnées de S perpendiculaires à Π dans le rapport $\frac{\sqrt{1-k^2}}{1}$.

    Les sphères U enveloppent une surface à deux nappes. Montrer que leurs lignes de courbure correspondent point par point à celles de S′. Examiner le cas où S est du second degré.

55. De chaque point M d'une surface S comme centre, on décrit un cercle K situé dans le plan tangent à S, et dont le rayon soit égal à une constante donnée.

    1°. Déterminer les familles de ∞^1 cercles K qui engendrent une surface sur laquelle ces cercles soient lignes de courbure. Lieux des centres des sphères dont une telle surface est l'enveloppe.

    2°. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que les cercles K forment un système cyclique. Cette condition étant supposée remplie, soit S_1, l'une des surfaces normales aux cercles K ; montrer que les lignes de courbure de S_1, correspondent à celles de S, quand on fait correspondre à chaque point M de S le point M_1 du cercle K correspondant où S_1 est normal à K.

    3°. Montrer que S_1 a une courbure totale constante, et que la congruence de droites qui a S, S_1 pour surfaces focales est une congruence de normales.

    4°. Soit C l'un des centres de courbure principaux de S en M, et C_1 le centre de courbure principal de S_1 en M_1, qui correspond à C. Étudier la congruence des droites CC_1.

56. Étant donnée une surface S, on désigne par C l'une quelconque des lignes de courbure de l'une des familles, par C′ l'une quelconque des lignes de courbure de l'autre famille, de sorte qu'en un point M de S se croisent une courbe C et une courbe C′. Soient ω, ω' les centres de courbure principaux correspondant à ces deux courbes ; et soient G, G' les centres de courbure géodésique de ces deux courbes.

    1°. Que peut-on dire des congruences définies respectivement par les quatre droites $MG, MG', G\omega, G'\omega'$?

    2°. Soit (γ) le cercle osculateur à C en M. Démontrer que (γ) engendre une surface canal quand M décrit une courbe C′. Trouver les sphères dont cette surface canal est l'enveloppe.

3°. Montrer que si S fait partie de l'une des familles d'un système triple orthogonal, les cercles osculateurs aux trajectoires orthogonales des surfaces de cette famille, construits aux divers points de S forment un système cyclique.

57. Soit O un point fixe, et S une surface quelconque ; en un point quelconque M de S on mène le plan tangent P et de O on abaisse la perpendiculaire sur P ; soit H non pied.

1°. Trouver les courbes de S qui, en chacun de leurs points M, admettent MH pour normale.

2°. Soit HI la médiane du triangle OHM ; la congruence des droites HI est une congruence de normales. Trouver les surfaces normales à toutes ces droites. Montrer que leurs lignes de courbure correspondent à un réseau de courbes conjuguées décrites par M sur S.

3°. Soit K le point où le plan perpendiculaire à MO rencontre MH ; et soit (γ) le cercle de centre K, passant en O, et situé dans le plan MOK. Les cercles (γ) forment un système cyclique.

58. De chaque point M du paraboloïde

$$\text{(P)} \qquad xy - az = 0,$$

comme centre, on décrit une sphère Σ tangente au plan $x\mathrm{O}y$. Soit A le point de contact de Σ avec ce plan et B le second point de contact de Σ avec son enveloppe.

1°. Quelles courbes doit décrire M sur (P) pour que AS engendre une développable ? Ces courbes forment sur P un réseau conjugué, et leurs tangentes en chaque point M sont perpendiculaires aux plans focaux de la congruence engendrée par AS.

2°. Déterminer les lignes de courbure de l'enveloppe de Σ ; les normales menées à cette enveloppe le long de chaque ligne de courbure découpent sur (P) un réseau conjugué.

3°. On considère le cercle C normal à Σ en A et B. Montrer qu'il y a une infinité de surfaces normales à tous les cercles C, et les déterminer.

4°. Montrer que ces surfaces forment l'une des familles d'un système triple orthogonal, et achever de déterminer ce système.

End of Project Gutenberg's Leçons de Géométrie Supérieure, by Ernest Vessiot

*** END OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK LEÇONS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE ***

***** This file should be named 35052-pdf.pdf or 35052-pdf.zip *****
This and all associated files of various formats will be found in:
http://www.gutenberg.org/3/5/0/5/35052/

Produced by Andrew D. Hwang, Laura Wisewell, Pierre Lacaze and the Online Distributed Proofreading Team at http://www.pgdp.net (The original copy of this book was generously made available for scanning by the Department of Mathematics at the University of Glasgow.)

Updated editions will replace the previous one--the old editions will be renamed.

Creating the works from public domain print editions means that no one owns a United States copyright in these works, so the Foundation (and you!) can copy and distribute it in the United States without permission and without paying copyright royalties. Special rules, set forth in the General Terms of Use part of this license, apply to copying and distributing Project Gutenberg-tm electronic works to protect the PROJECT GUTENBERG-tm concept and trademark. Project Gutenberg is a registered trademark, and may not be used if you charge for the eBooks, unless you receive specific permission. If you do not charge anything for copies of this eBook, complying with the rules is very easy. You may use this eBook for nearly any purpose such as creation of derivative works, reports, performances and research. They may be modified and printed and given away--you may do practically ANYTHING with public domain eBooks. Redistribution is subject to the trademark license, especially commercial redistribution.