

The Project Gutenberg EBook of Étude sur le Mouvement Permanent des Fluides, by  
François de Salvert

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with  
almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or  
re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included  
with this eBook or online at [www.gutenberg.org](http://www.gutenberg.org)

Title: Étude sur le Mouvement Permanent des Fluides  
Thèses Présentées à la Faculté des Sciences de Paris pour  
Obtenir le Grade de Docteur ès Sciences Mathématiques

Author: François de Salvert

Release Date: July 5, 2010 [EBook #33083]

Language: French

Character set encoding: ISO-8859-1

\*\*\* START OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK FLUIDES \*\*\*

Produced by Sébastien Blondeel, Joshua Hutchinson, and the  
Online Distributed Proofreading Team at <http://www.pgdp.net>  
(This file was produced from images from the Cornell  
University Library: Historical Mathematics Monographs  
collection.)

#### NOTES SUR LA TRANSCRIPTION

Ce livre a été préparé à l'aide d'images fournies par la Cornell  
University Library: Historical Mathematics Monographs collection.

Ce fichier est optimisée pour imprimer, mais peut être aisément  
reformater pour être lu sur un écran. Veuillez consulter le  
préambule du fichier  $\text{\LaTeX}$  source pour les instructions.

N° d'ordre  
352

# THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. FRANÇOIS DE SALVERT,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

---

1<sup>re</sup> THÈSE. — ÉTUDE SUR LE MOUVEMENT PERMANENT DES FLUIDES.

2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

Soutenues le 1874, devant la Commission d'Examen.

---

MM. PUISEUX, *Président*

BOUQUET, }  
BONNET, } *Examineurs*

---

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

---

1874

# ACADÉMIE DE PARIS

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN .....	MM. MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES	{ DUMAS. BALARD.	
	{ DELAFOSSE .....	Minéralogie.
	CHASLES .....	Géométrie supérieure.
	LE VERRIER .....	Astronomie.
	P. DESAINS .....	Physique.
	LIUVILLE .....	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX .....	Astronomie.
	HÉBERT .....	Géologie.
	DUCHARTRE .....	Botanique.
	JAMIN .....	Physique.
PROFESSEURS .....	{ SERRET .....	Calcul différentiel et intégral.
	H. S <sup>te</sup> -CLAIRE DEVILLE .....	Chimie.
	PASTEUR .....	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS .....	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
	BERT .....	Physiologie.
	HERMITE .....	Algèbre supérieure.
	BRIOT .....	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET .....	Mécanique et physique expérimentale.
AGRÉGÉS .....	{ BERTRAND .....	} Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE .....	
	PELIGOT .....	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE .....	PHILIPPON.	

À MON VÉNÉRÉ PROFESSEUR

**LE P. JOUBERT,**

DE L'ÉCOLE SAINTE-GENEVIÈVE,

HOMMAGE  
D'AFFECTUEUSE RECONNAISSANCE.

F. DE SALVERT.



---

# PREMIÈRE THÈSE.

---

## ÉTUDE

SUR LE

## MOUVEMENT PERMANENT DES FLUIDES.

---

### INTRODUCTION.

Nous n'envisageons dans ce travail que l'hypothèse particulière connue sous le nom de *mouvement permanent des fluides*. Ce cas, en effet, en même temps qu'il est le plus fréquent dans la pratique et le plus intéressant au point de vue des applications, est aussi, par une coïncidence heureuse qui se présente dans un grand nombre de questions, beaucoup plus facile à étudier que le cas général, et cela par un double motif : d'abord, au point de vue analytique, la disparition des dérivées relatives au temps introduit une simplification notable dans les équations du mouvement, et la difficulté de leur intégration en est certainement diminuée, quoiqu'elle reste toujours fort grande ; en second lieu, et c'est pour nous le point le plus important, la réduction des quatre variables indépendantes aux trois seules coordonnées  $x, y, z$  permet de substituer aux procédés purement analytiques une étude géométrique fondée sur la considération de surfaces représentatives, ainsi qu'on le fait dans une foule de questions de Mécanique ou de Physique mathématique, telles que la rotation des corps, l'équilibre des fluides, ou les problèmes de chaleur et d'électricité.

En effet, supposons que l'on ait déterminé la fonction de  $x, y$  et  $z$ , qui représente chacun des cinq éléments dont dépend la connaissance du mouvement, et soit, par exemple,

$$p = f(x, y, z)$$

Exposé du sujet

$p$  représentant la pression ; on voit que, si l'on pose

$$f(x, y, z) = \text{const.},$$

on aura une famille de surfaces analogues aux *surfaces de niveau*, auxquelles elles se réduisent dans le cas de l'équilibre, ou encore aux *surfaces isothermes*, famille qui sera définie par cette propriété qu'en tous les points d'une même surface la pression aura la même valeur, et qu'on pourra appeler par conséquent *surfaces d'égale pression*.

On pourra considérer de même des surfaces d'égale densité, d'égale force vive, ou toute autre analogue définie par la constance d'un élément quelconque du mouvement, et l'on comprend que la considération directe de ces surfaces pourra, jusqu'à un certain point, remplacer les procédés analytiques pour arriver à la découverte des propriétés du mouvement.

C'est à ce point de vue, à la fois géométrique et analytique, que nous allons nous placer dans ce travail, et nous baserons cette étude sur la considération des *surfaces de nulle résistance*, que nous allons maintenant définir, et dont nous montrerons les propriétés remarquables.

## I. — SURFACES DE NULLE RÉSISTANCE

### DÉFINITIONS ; PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES.

Résistance  
au mouvement  
d'un fluide.

Lorsqu'un fluide est en équilibre, et qu'on vient à introduire une paroi solide au sein de sa masse, la pression supportée par chaque élément de cette paroi est précisément égale à celle que supportait la molécule fluide primitivement située au même point, et qu'on nomme *pression hydrostatique* relative à ce point ; mais, si le fluide est en mouvement, il n'en sera plus ainsi. Chaque élément de la paroi supportera, dans ce cas, non-seulement la pression hydrostatique  $p$ , qui s'exerce sur ses deux faces (et qu'il supporterait seule, s'il participait au mouvement du fluide), mais encore un effort provenant du mouvement même du fluide, et dirigé suivant ce mouvement, lequel variera évidemment en chaque point avec la grandeur et la direction de la vitesse. Cet effort, qui tend à entraîner la paroi dans le mouvement du fluide, ou, ce qui est la même chose au sens près, la résistance qu'elle oppose au mouvement lorsqu'on la maintient fixe, ont tous deux pour expression, en grandeur absolue,  $\rho\omega V^2 \cos \theta$ ,  $\rho$  étant la densité,  $V$  la vitesse,  $\omega$  l'élément de paroi, et  $\theta$  l'angle aigu que forme la normale à la paroi avec la vitesse du fluide<sup>(1)</sup>. Il résulte immédiatement de cette expression, ce qui du reste est presque évident *a priori*, que si  $\theta = 90^\circ$ , c'est-à-dire si le plan de la paroi contient la direction de la vitesse, la résistance dont nous parlons sera

<sup>(1)</sup> Voir DUHAMEL, *Cours de Mécanique*, 3<sup>e</sup> édition, liv. IV, § 193 et suiv.



nulle, et, par conséquent, une surface dont tous les éléments satisferaient à cette condition n'opposerait aucune résistance au mouvement du fluide. Cette condition, en particulier, se trouve forcément remplie par les parois fixes du vase ou du réservoir qui contient un fluide en mouvement.

D'après cela, nous appellerons *surface de nulle résistance* « une surface telle qu'en chacun de ses points la vitesse du fluide soit située dans le plan tangent ».

Surfaces  
de nulle résistance

On conclura immédiatement de cette définition :

1° Que si l'on considère un point du fluide, une surface de nulle résistance passant par ce point, et la molécule qui y est actuellement, son mouvement tout entier s'effectuera sur cette surface, en sorte que les surfaces de nulle résistance contiennent les trajectoires de toutes les molécules fluides ;

2° Qu'aucune molécule fluide ne peut traverser cette surface, puisque, pour cela, il faudrait qu'au moment de son passage sa vitesse fit un angle fini avec la surface, en sorte que toutes les molécules situées actuellement à l'intérieur de cette surface y resteront constamment, et de même les molécules actuellement extérieures le seront aussi indéfiniment.

On peut donc dire qu'une surface de nulle résistance partage la masse fluide en deux portions telles, que le mouvement n'opère entre elles aucun échange d'éléments.

Il résulte de là deux propriétés importantes que nous allons établir.

Propriétés relatives :

La considération du centre de gravité d'un système en mouvement est assez familière en Dynamique pour que nous n'ayons pas à la rappeler ici ; mais nous pousserons plus loin l'analogie dans la même voie, et nous considérerons ce que nous appellerons *plans principaux, moments, et ellipsoïde d'inertie* d'un système à une époque donnée, c'est-à-dire les plans principaux, moments et ellipsoïde d'inertie qu'il y aurait lieu de considérer, si le système venait à être solidifié dans la figure qu'il offre à cette époque.

(a) à l'ellipsoïde  
central d'inertie

D'après cela, de même que le centre de gravité du système, à une époque quelconque, sera déterminé par la condition que, en prenant ce point pour origine des coordonnées, les sommes

$$\mathbf{S} mx, \quad \mathbf{S} my, \quad \mathbf{S} mz,$$

étendues à toutes les molécules  $m$  du système, soient nulles à cette époque, de même les plans principaux d'inertie, relatifs au même point, seront déterminés par la condition jointe à la précédente que, en les prenant pour plans coordonnés, les sommes

$$\mathbf{S} myz, \quad \mathbf{S} mzx, \quad \mathbf{S} mxy,$$

soient également nulles à la même époque ; enfin les sommes

$$\mathbf{S} m(y^2 + z^2), \quad \mathbf{S} m(z^2 + x^2), \quad \mathbf{S} m(x^2 + y^2),$$

prises dans les mêmes conditions, seront pour nous les moments principaux d'inertie, relatifs au centre de gravité, pour la même époque.

Si l'on applique maintenant ces considérations à une portion de la masse fluide délimitée actuellement par une surface choisie arbitrairement, il est facile de voir qu'en général ces divers éléments varieront de grandeur ou de position avec le temps. En effet, supposons que l'on ait déterminé ces différents éléments pour la position actuelle de la masse considérée, et prenons le centre de gravité et les plans principaux d'inertie, relatifs à cette position, pour origine et plans fixes de coordonnées. Parmi les sommes ci-dessus, les six premières seront nulles par hypothèse ; mais, si nous calculons leurs valeurs pour les époques successives, elles varieront forcément avec le temps ; car, en raison de la continuité du fluide, ce sont en réalité des intégrales triples par rapport à  $x, y, z$  dont les limites varient à chaque instant avec la configuration extérieure de la masse considérée. Elles ne resteront donc pas constamment nulles, et, conséquemment, l'origine et les plans coordonnés ne seront pas constamment le centre de gravité et les plans principaux d'inertie du système considéré. La valeur des moments principaux d'inertie variera en même temps par la même raison, et, par conséquent, l'ellipsoïde central qu'il y aurait lieu de considérer variera à chaque instant de grandeur et de position.

Il en serait tout autrement si nous considérions une portion de la masse fluide délimitée actuellement par des surfaces de nulle résistance ; car, en vertu de la remarque faite plus haut, la configuration extérieure de cette masse restera invariablement la même, et, conséquemment, les limites d'intégration ne variant plus, les différentes sommes ci-dessus seront alors des constantes. L'origine et les plans coordonnés seront donc alors constamment le centre de gravité et les plans principaux d'inertie relatifs à ce point ; et d'ailleurs les moments d'inertie relatifs au même point conserveront constamment la même grandeur. Nous pourrions, en conséquence, énoncer la propriété suivante :

THÉORÈME I. — *L'ellipsoïde central d'inertie, relatif à une portion du fluide limitée par des surfaces de nulle résistance, reste invariable de forme et de position pendant le mouvement.*

Ces conclusions sont d'ailleurs presque évidentes dans ce cas, puisque, d'une part, en vertu de l'hypothèse de la permanence, les densités sont constantes en chaque point, et que, d'autre part, en vertu du choix de la surface limitative, on considère toujours les mêmes points de l'espace.

L'assimilation de la masse fluide à un solide invariable de position s'impose alors d'elle-même à l'esprit ; le centre de gravité et l'ellipsoïde central du système sont, à un instant quelconque, le centre de gravité et l'ellipsoïde central de ce solide, et par conséquent, comme lui, invariables de position aussi bien que de grandeur.

Nous allons maintenant montrer une seconde propriété des surfaces de nulle résistance qui est précisément relative à ce *solide représentatif*.

Conformément à ce qui précède, nous appellerons *solide représentatif* correspondant à une portion du fluide un solide continu qui, occupant la même étendue de l'espace, offrirait en chaque point la même densité que le fluide considéré, et nous énoncerons cette nouvelle propriété :

(b) au solide représentatif

THÉORÈME II. — *Le solide représentatif correspondant à une portion de la masse fluide limitée par des surfaces de nulle résistance, serait en équilibre sous l'action des forces qui sollicitent cette masse.*

En effet, désignons par  $m\mathcal{X}$ ,  $m\mathcal{Y}$ ,  $m\mathcal{Z}$  les composantes de la force totale  $m\mathcal{F}$ , qui sollicite la molécule de masse  $m$ , c'est-à-dire la résultante des actions tant intérieures qu'extérieures qui s'exercent sur cette molécule, en y comprenant les liaisons qui proviennent de la constitution même du fluide, en sorte que l'on puisse considérer chaque molécule comme entièrement libre ; les équations de son mouvement seront

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \mathcal{X}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathcal{Y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \mathcal{Z}.$$

Nous en concluons, par une combinaison facile,

$$\begin{aligned} z \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2z}{dt^2} &= \mathcal{Y}z - \mathcal{Z}y, \\ x \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2x}{dt^2} &= \mathcal{Z}x - \mathcal{X}z, \\ y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} &= \mathcal{X}y - \mathcal{Y}x; \end{aligned}$$

puis, en multipliant par  $m$  et faisant la somme de ces différentes équations pour toutes les molécules  $m$  de la masse considérée, nous obtiendrons celles-ci :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} m \frac{d^2x}{dt^2} &= \mathbf{S} m \mathcal{X}, \\ \mathbf{S} m \frac{d^2y}{dt^2} &= \mathbf{S} m \mathcal{Y}, \\ \mathbf{S} m \frac{d^2z}{dt^2} &= \mathbf{S} m \mathcal{Z}; \end{aligned}$$

( 6 )

$$\begin{aligned}\mathbf{S} m \left( z \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= \mathbf{S} m(\mathcal{Y} z - \mathcal{Z} y), \\ \mathbf{S} m \left( x \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \mathbf{S} m(\mathcal{Z} x - \mathcal{X} z), \\ \mathbf{S} m \left( y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= \mathbf{S} m(\mathcal{X} y - \mathcal{Y} x).\end{aligned}$$

Le fluide étant supposé continu, chacune de ces sommes est une intégrale triple, et, suivant une remarque déjà faite, les limites de l'intégration, c'est-à-dire la surface extérieure de la masse considérée, étant invariables avec le temps, ainsi que la masse de chaque molécule, on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{S} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d^2 \mathbf{S} m x}{dt^2}, \\ \mathbf{S} m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d^2 \mathbf{S} m y}{dt^2}, \\ \mathbf{S} m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d^2 \mathbf{S} m z}{dt^2}; \\ \mathbf{S} m \left( z \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= \frac{d}{dt} \mathbf{S} m \left( z \frac{dy}{dt} - y \frac{dz}{dt} \right), \\ \mathbf{S} m \left( x \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \frac{d}{dt} \mathbf{S} m \left( x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} \right), \\ \mathbf{S} m \left( y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= \frac{d}{dt} \mathbf{S} m \left( y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right).\end{aligned}$$

Or, si l'on considère les sommes

$$\begin{aligned}\mathbf{S} m x, \quad \mathbf{S} m y, \quad \mathbf{S} m z, \\ \mathbf{S} m \left( z \frac{dy}{dt} - y \frac{dz}{dt} \right), \quad \mathbf{S} m \left( x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} \right), \quad \mathbf{S} m \left( y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right)\end{aligned}$$

comme des intégrales triples par rapport à  $x, y, z$ , elles seront évidemment indépendantes du temps, puisque d'une part le temps n'entre point explicitement sous le signe somme, et que d'autre part les limites de l'intégration n'en dépendent pas elles-mêmes. Les seconds membres des six équations que nous venons d'écrire sont donc nuls, et par conséquent aussi ceux des six autres qui les précèdent, d'où, en définitive, les six équations suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbf{S} m \mathcal{X} = 0, & \mathbf{S} m \mathcal{Y} = 0, & \mathbf{S} m \mathcal{Z} = 0, \\ \mathbf{S} m(\mathcal{Y} z - \mathcal{Z} y) = 0 & \mathbf{S} m(\mathcal{Z} x - \mathcal{X} z) = 0 & \mathbf{S} m(\mathcal{X} y - \mathcal{Y} x) = 0 \end{cases}$$

On reconnaît immédiatement dans ces équations la forme très-connue des équations d'équilibre des solides. Ces équations, qui comprennent toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui sollicitent la masse fluide,

expriment donc parfaitement l'équilibre du solide représentatif, supposé soumis à l'action de ces forces, ce qui justifie la proposition énoncée.

Toutefois, il convient de remarquer, dès maintenant, que les forces *intérieures*, c'est-à-dire celles qui s'exercent entre deux molécules quelconques de la masse considérée, étant égales deux à deux, et de signes contraires, disparaîtront de ces équations, en sorte qu'il n'y entrera plus en réalité que les forces *extérieures*, et les forces de liaison ou pressions, qui proviennent de la partie du fluide extérieure à celle que l'on aura considérée.

Si, au lieu d'appliquer les six équations précédentes au solide représentatif, on les applique à la masse fluide elle-même, on arrive à une remarque intéressante déjà faite dans le Cours de Mécanique. On sait que les six équations dites d'*équilibre des solides* sont nécessaires pour l'équilibre d'un système quelconque; mais elles ne sont suffisantes que dans le cas d'un système invariable<sup>(1)</sup>. Si l'on eût douté de cette dernière proposition, le résultat ci-dessus en aurait fourni une preuve péremptoire en montrant un système en mouvement, pour lequel elles sont néanmoins vérifiées.

Afin de bien montrer que cette propriété est réellement caractéristique des surfaces de nulle résistance, nous allons l'établir d'une autre façon, en cherchant d'une manière générale quelles forces il faudrait appliquer à un solide représentatif quelconque, pour le maintenir en équilibre sous l'action de ces forces jointes à celles qui sollicitent le fluide.

Examen du cas  
général.

Pour cela, appliquons d'abord aux molécules fluides contenues à l'intérieur d'une surface quelconque les deux théorèmes généraux de la Dynamique relatifs aux quantités de mouvement d'un système matériel.

Démonstration  
synthétique.

En effet, isolons par la pensée, au sein d'un fluide en mouvement, une portion de la masse circonscrite par une surface quelconque ABCD...; et soit A'B'C'D'... la surface infiniment voisine qui renferme la même masse au bout du temps infiniment petit  $dt$ . Les volumes compris sous ces deux surfaces se composeront d'une partie finie commune, et de calottes infiniment minces qui appartiendront exclusivement à l'une ou à l'autre. Parmi ces calottes, les unes renfermeront les molécules qui sont sorties de la première surface, les autres celles qui y sont entrées, de sorte que si, en chaque point de cette surface, on projette sur la normale *intérieure* la vitesse du fluide relative à ce point, la projection ou *vitesse normale*  $V_n$  sera positive pour tous les points de certaines calottes, et négative pour tous les points des autres, et par conséquent nulle pour tous les points des lignes de séparation, c'est-à-dire pour les intersections des deux surfaces.

<sup>(1)</sup> Voir DELAUNAY, *Traité de Mécanique rationnelle* (3<sup>e</sup> édition), § 183, p. 304, et § 185, p. 308.

Cela posé, appliquons au déplacement infiniment petit que nous venons de définir le théorème des quantités de mouvements projetées sur un axe, lequel consiste en ce que l'accroissement de la somme des quantités de mouvement du système est égal à la somme des impulsions des forces extérieures appliquées au système pendant le temps considéré.

Écrivons d'abord le second membre de cette équation, c'est-à-dire la somme de ces impulsions, qui se forme sans difficulté.

Les forces extérieures sont ici :

1° Les forces extérieures données, qui s'exercent sur toute l'étendue de la masse considérée, et donneront par conséquent un terme tel, que  $\mathbf{S} \varpi \mathbf{R}_p dt$ ,  $\mathbf{R}_p$  étant la composante de ces forces dirigées suivant l'axe considéré, et rapportée à l'unité de masse,  $\varpi$  désignant l'élément de masse, et  $\mathbf{S}$  une sommation s'étendant à tout le volume de la masse considérée.

2° Les pressions provenant des molécules fluides extérieures à la masse que nous considérons. Ces forces, s'exerçant seulement sur la surface qui limite cette masse, donneront un terme tel, que  $\sum \omega p \cos \delta \cdot dt$ , où  $\delta$  représente l'angle de la normale intérieure à cette surface avec l'axe considéré,  $\omega$  l'élément de surface, et  $\sum$  une sommation s'étendant à toute la surface extérieure de la masse considérée. Le second membre de l'équation à former, ou la somme des impulsions, sera donc

$$\mathbf{S} \varpi \mathbf{R}_p dt + \sum \omega p \cos \delta \cdot dt.$$

Passons maintenant au premier membre, ou à l'accroissement de la quantité de mouvement du système.

Si l'on désigne par  $V_p$  la projection de la vitesse sur l'axe considéré, il faudra former la somme  $\mathbf{S} \varpi V_p$  relative aux deux positions successives de la masse fluide, et faire la différence des deux résultats. Or il est facile de voir que, en vertu de la permanence du mouvement, toute la portion commune aux deux surfaces n'interviendra pas dans ce résultat, car les molécules fluides reprenant par hypothèse la même vitesse et la même densité en passant au même point, les éléments correspondant à ces points seront les mêmes dans les deux sommes, et disparaîtront par conséquent du résultat. La différence cherchée se réduit donc à la différence entre la somme des quantités de mouvement des portions qui sont sorties de la surface, et la somme des quantités de mouvement des portions qui y sont entrées.

Considérons les premières pour lesquelles, comme nous l'avons déjà remarqué, la vitesse normale  $V_n$  est négative. Si nous découpons la portion correspondante de la surface en éléments infiniment petits  $\omega$ , on voit que le volume du fluide qui est sorti de la surface par un de ces éléments peut être considéré comme un cylindre droit de base  $\omega$ , dont la hauteur serait  $-V_n dt$ , la masse  $-\rho \omega V_n dt$ , et par conséquent la quantité du mouvement

projetée  $-\rho\omega V_n dt V_p$ . Or, comme la réunion de tous ces volumes élémentaires constitue évidemment la portion de la masse fluide qui est sortie de la surface, la quantité de mouvement correspondant à cette portion sera  $-\sum_1 \rho\omega V_n dt V_p$ , en désignant par  $\sum_1$  une sommation s'étendant à toutes les portions de la surface par lesquelles il est sorti du fluide.

Si nous calculons de même la quantité de mouvement correspondant à la portion de masse fluide qui est entrée dans la surface, il est évident que nous obtiendrons une expression tout analogue, sauf qu'ici  $V_n$  étant positif, la longueur du cylindre sera  $+V_n dt$ , et par conséquent l'expression résultante sera  $+\sum_2 \rho\omega V_n dt V_p$ , la sommation  $\sum_2$  s'étendant cette fois aux portions de surface par lesquelles il est entré du fluide.

Comme il faut faire maintenant la différence de ces deux expressions, nous trouverons en définitive que l'accroissement total de la quantité de mouvement du système sera

$$-\sum_1 \omega\rho V_n dt V_p - \sum_2 \omega\rho V_n dt V_p = -\sum \omega\rho V_n dt V_p,$$

la sommation  $\sum$  s'étendant désormais à toute la surface. En rapprochant les deux membres que nous avons ainsi évalués, l'équation que nous voulions établir sera

$$\mathbf{S} \varpi R_p dt + \sum \omega p \cos \delta \cdot dt = -\sum \omega\rho V_n dt V_p$$

ou en faisant passer tous les termes dans le premier membre, et supprimant le facteur commun  $dt$ ,

$$\mathbf{S} \varpi R_p + \sum \omega p \cos \delta + \sum \omega\rho V_n V_p = 0.$$

Cela posé, si l'on désigne, conformément à l'usage, par  $u, v, w$  les composantes de la vitesse suivant les axes coordonnés ; par  $X, Y, Z$  les composantes suivant ces axes de la force extérieure donnée, rapportées à l'unité de masse ; enfin par  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles que forme avec les mêmes axes la normale *intérieure* à la surface considérée, et que l'on prenne successivement pour axe de projection les trois axes coordonnés, l'équation ci-dessus donnera lieu aux trois suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{S} \varpi X + \sum \omega p \cos \alpha + \sum \omega\rho u V_n = 0, \\ \mathbf{S} \varpi Y + \sum \omega p \cos \beta + \sum \omega\rho v V_n = 0, \\ \mathbf{S} \varpi Z + \sum \omega p \cos \gamma + \sum \omega\rho w V_n = 0. \end{cases}$$

Ayant ainsi formé une première fois la quantité de mouvement et les impulsions des forces extérieures correspondant à chaque élément de la masse considérée, si au lieu de les projeter sur les trois axes coordonnés nous en prenons les moments par rapport à ces axes, nous trouverons, à l'aide

des mêmes raisonnements, et en appliquant l'autre théorème général de la Dynamique qui est relatif à cet objet, les trois autres équations suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} \mathbf{S} \varpi(Yz - Zy) + \sum \omega p(z \cos \beta - y \cos \gamma) + \sum \omega \rho(vz - wy)V_n = 0, \\ \mathbf{S} \varpi(Zx - Xz) + \sum \omega p(x \cos \gamma - z \cos \alpha) + \sum \omega \rho(wx - uz)V_n = 0, \\ \mathbf{S} \varpi(Xy - Yx) + \sum \omega p(y \cos \alpha - x \cos \beta) + \sum \omega \rho(uy - vz)V_n = 0. \end{cases}$$

Les équations (3) et (4), un peu longues à établir, sont intéressantes en ce qu'elles indiquent quelles forces il faudrait appliquer au solide représentatif correspondant à une surface quelconque, pour le maintenir en équilibre, conjointement avec les forces qui sollicitent la masse fluide.

En effet, on reconnaît encore dans la forme de ces équations les conditions qui expriment l'équilibre des trois systèmes de force suivants :

1° Une force appliquée à chaque élément de la masse considérée, et dont les composantes seraient  $\varpi X$ ,  $\varpi Y$ ,  $\varpi Z$ , c'est-à-dire l'ensemble des forces extérieures données.

2° Une force égale à  $p$  appliquée à chaque élément de la surface extérieure de la masse considérée, et suivant la normale intérieure à cette surface, c'est-à-dire l'ensemble des actions exercées par les parties extérieures du fluide sur la portion de masse considérée.

Ces deux premiers systèmes réunis tiennent lieu dans les équations (3) et (4) de l'ensemble des forces qui sollicitent la masse considérée ; car, en vertu d'une remarque déjà faite, les forces intérieures, c'est-à-dire celles qui s'exercent entre deux molécules de cette masse ne donneraient aucun terme dans ces équations, comme étant deux à deux égales et de signes contraires, en sorte que l'ensemble des deux premiers termes de ces mêmes équations représente exactement le premier membre des équations (2).

3° Enfin une force appliquée également à chaque élément de la surface, et dont les composantes seraient respectivement

$$\omega \rho u V_n, \quad \omega \rho v V_n, \quad \omega \rho w V_n.$$

Il est facile d'interpréter la signification de ce dernier système ; car, si l'on désigne respectivement par  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  et  $\theta$  les angles de la vitesse avec les trois axes coordonnés et la normale intérieure de la surface, on aura

$$(5) \quad \begin{aligned} u &= V \cos \lambda, & v &= V \cos \mu, & w &= V \cos \nu, \\ V_n &= V \cos \theta, \end{aligned}$$

et, par conséquent, en substituant,

$$\begin{aligned} \omega \rho u V_n &= \omega \rho V^2 \cos \theta \cdot \cos \lambda, \\ \omega \rho v V_n &= \omega \rho V^2 \cos \theta \cdot \cos \mu, \\ \omega \rho w V_n &= \omega \rho V^2 \cos \theta \cdot \cos \nu. \end{aligned}$$



Or, si l'on se reporte à ce que nous avons dit page 2, sur la résistance d'un élément, de surface au mouvement du fluide, on voit que le facteur  $\omega\rho V^2 \cos\theta$  représente en grandeur absolue la résistance de l'élément  $\omega$ , et que, d'ailleurs, ce facteur sera positif ou négatif, suivant que l'angle  $\theta$  sera plus petit ou plus grand que 90 degrés, ou, en d'autres termes, suivant que la vitesse sera dirigée vers l'intérieur de la surface ou vers l'extérieur. D'après cela, les trois composantes ci-dessus seront, dans tous les cas, celles d'une force égale à la résistance de l'élément, dirigée suivant la vitesse en ce point, et dans celui des deux sens qui correspond à l'intérieur de la surface.

Les équations (3) et (4) pourront donc se traduire par le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Le solide représentatif correspondant à une portion quelconque de la masse fluide serait en équilibre sous l'action des forces qui sollicitent cette masse, si l'on appliquait sur chaque élément de la surface extérieure, suivant la direction de la vitesse en ce point, et dans celui des deux sens qui correspond à l'intérieur de la surface, un effort égal à la résistance que cet élément supposé solidifié opposerait au mouvement du fluide.*

De cette proposition découle immédiatement comme corollaire la précédente, à savoir que *pour les surfaces de nulle résistance le solide représentatif serait en équilibre sous l'action des forces qui sollicitent la masse fluide.*

Nous avons vu, en établissant le théorème qui précède, que, si l'on considère deux positions infiniment voisines d'une même masse fluide, la vitesse normale  $V_n$  sera nulle pour tous les points de leur intersection. Il en sera évidemment de même pour le lieu de ces intersections, d'où cette nouvelle propriété :

THÉORÈME IV. — *L'enveloppe des positions successives d'une même masse fluide est une surface de nulle résistance.*

Il est bien entendu d'ailleurs que la surface dont nous parlons n'appartient pas forcément à un type géométrique unique et déterminé, mais qu'elle pourra se composer de parties appartenant à des types ou des individualités distinctes, dont chacune vérifiera séparément la condition  $V_n = 0$ , et rentrera par conséquent dans la catégorie des surfaces de nulle résistance.

Les théorèmes relatifs au solide représentatif, que nous venons de démontrer de deux manières différentes, ont été établis en invoquant seulement les principes généraux de la dynamique. Comme ils présentent une

Démonstration  
analytique.

certain importance, il ne sera pas indifférent de montrer comment on peut aussi les déduire analytiquement des équations du mouvement.

Pour cela, rappelons d'abord que les quatre équations communes à tous les fluides sont les suivantes :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy} - w \frac{du}{dz}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy} - w \frac{dv}{dz}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - u \frac{dw}{dx} - v \frac{dw}{dy} - w \frac{dw}{dz}; \end{cases}$$

$$(7) \quad \frac{d \cdot \rho u}{dx} + \frac{d \cdot \rho v}{dy} + \frac{d \cdot \rho w}{dz} = 0,$$

dont les trois premières résultent immédiatement du théorème de d'Alembert, et la quatrième exprime la continuité de la masse fluide. Pour compléter les données du problème, il faudrait y ajouter une cinquième équation définissant la nature du fluide; mais cette équation n'intéresse pas l'objet que nous avons en vue, et qui doit s'appliquer à tous les fluides indistinctement.

Cela posé, multiplions la première des équations (6) par  $\rho$ , l'équation (7) par  $u$ , et ajoutons en faisant passer tous les termes dans le second membre, nous obtiendrons ainsi

$$\rho X - \frac{dp}{dx} - \frac{d \cdot \rho u^2}{dx} - \frac{d \cdot \rho uv}{dy} - \frac{d \cdot \rho uw}{dz} = 0;$$

puis, ayant multiplié tous les termes de cette dernière équation par  $dx dy dz$ , intégrons-les dans l'intérieur d'une surface fermée quelconque, le résultat pourra s'indiquer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \iiint \rho X dx dy dz - \iiint \frac{dp}{dx} dx dy dz - \iiint \frac{d \cdot \rho u^2}{dx} dx dy dz \\ - \iiint \frac{d \cdot \rho uv}{dy} dx dy dz - \iiint \frac{d \cdot \rho uw}{dz} dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

La première de ces intégrales est ce que nous avons déjà désigné sous une notation plus simple par  $\mathbf{S} \varpi X$ , c'est-à-dire la somme des projections sur l'axe des  $x$  de toutes les forces extérieures appliquées au système considéré. Dans chacune des autres intégrales triples, nous pourrions effectuer une intégration et écrire, par conséquent, l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \varpi X - \iint (p)_1^2 dy dz \\ - \iint (\rho u^2)_1^2 dy dz - \iint (\rho uv)_1^2 dz dx - \iint (\rho uw)_1^2 dx dy = 0; \end{aligned}$$

en indiquant, suivant une notation connue, par un crochet affecté de deux indices la différence des substitutions correspondant aux deux limites de l'intégration.

Or, si nous appelons encore  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles de la normale intérieure avec les axes et  $\omega$  un élément de surface, on pourra prendre dans ces équations

$$dy dz = \omega \cos \alpha, \quad dz dx = \omega \cos \beta, \quad dx dy = \omega \cos \gamma,$$

ou bien

$$dy dz = -\omega \cos \alpha, \quad dz dx = -\omega \cos \beta, \quad dx dy = -\omega \cos \gamma,$$

suivant qu'on entrera dans la surface ou qu'on en sortira, en s'avancant à partir de l'élément  $\omega$  dans les directions respectives des  $x$ , des  $y$  et des  $z$ , ou, en d'autres termes, suivant que l'élément  $\omega$  appartiendra à la portion de la surface à laquelle se rapporte l'indice 1, ou à celle à laquelle se rapporte l'indice 2.

Il suit de là que, si l'on désigne par  $\sum$  un signe de sommation s'étendant à tous les éléments de la surface, l'équation précédente pourra s'écrire

$$\mathbf{S} \varpi X + \sum \omega p \cos \alpha + \sum \omega \rho u^2 \cos \alpha + \sum \omega \rho uv \cos \beta + \sum \omega \rho uw \cos \gamma = 0,$$

ou, en réunissant les termes semblables,

$$\mathbf{S} \varpi X + \sum \omega p \cos \alpha + \sum \omega \rho u(u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma) = 0;$$

mais, comme nous avons appelé  $V_n$  la projection de la vitesse sur la normale intérieure, nous avons, par définition,

$$V_n = u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma,$$

et, par conséquent, en reportant dans l'équation précédente, celle-ci prendra la forme

$$\mathbf{S} \varpi X + \sum \omega p \cos \alpha + \sum \omega \rho u V_n = 0,$$

ce qui est précisément la première des équations (3). On obtiendrait les deux autres par un calcul tout semblable.

De même, pour obtenir la première des équations (4), multiplions la deuxième des équations (6) par  $z$ , la troisième par  $y$ , et retranchons l'une de l'autre après avoir ajouté de part et d'autre le terme  $vw$ , le résultat pourra se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\rho} \left( z \frac{dp}{dy} - y \frac{dp}{dz} \right) = Yz - Zy - u \frac{d(vz - wy)}{dx} - v \frac{d(vz - wy)}{dy} - w \frac{d(vz - wy)}{dz}.$$

Puis, multipliant cette dernière équation par  $\rho$ , et l'ajoutant à l'équation (7) multipliée par le facteur  $(vz - wy)$ , on formera la suivante :

$$\rho(Yz - Zy) - \left( z \frac{dp}{dy} - y \frac{dp}{dz} \right) - \frac{d \cdot \rho u (vz - wy)}{dx} - \frac{d \cdot \rho v (vz - wy)}{dy} - \frac{d \cdot \rho w (vz - wy)}{dz} = 0,$$

qui, par l'intégration dans les mêmes conditions que précédemment, conduira à celle-ci :

$$\mathbf{S} \varpi(Yz - Zy) + \sum \omega p (z \cos \beta - y \cos \gamma) + \sum \omega \rho (vz - wy) (u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma) = 0,$$

ou, sous une forme plus abrégée,

$$\mathbf{S} \varpi(Yz - Zy) + \sum \omega p (z \cos \beta - y \cos \gamma) + \sum \omega \rho (vz - wy) V_n = 0,$$

ce qui est la première des équations (4), et les deux autres s'obtiendraient évidemment d'une façon analogue.

Nous retrouvons ainsi directement par le calcul les équations (3) et (4) qui constituent le théorème III. Si maintenant nous y introduisons la supposition  $V_n = 0$ , ce qui revient à considérer une portion de la masse fluide limitée par des surfaces de nulle résistance, ces équations se réduiront par la disparition des derniers termes aux suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \varpi X + \sum \omega p \cos \alpha &= 0, \\ \mathbf{S} \varpi Y + \sum \omega p \cos \beta &= 0, \\ \mathbf{S} \varpi Z + \sum \omega p \cos \gamma &= 0, \\ \mathbf{S} \varpi(Yz - Zy) + \sum \omega p (z \cos \beta - y \cos \gamma) &= 0, \\ \mathbf{S} \varpi(Zx - Xz) + \sum \omega p (x \cos \gamma - z \cos \alpha) &= 0, \\ \mathbf{S} \varpi(Xy - Yx) + \sum \omega p (y \cos \alpha - x \cos \beta) &= 0, \end{aligned}$$

lesquelles coïncident exactement avec le système (2), ainsi que nous avons eu déjà occasion de le remarquer (p. 10).

On retrouve donc en même temps, par le calcul, la propriété caractéristique des surfaces de nulle résistance exprimée par le théorème II, et c'est ainsi qu'au début de nos recherches nous avons établi cette propriété dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. XL, séance du 29 mai 1865).

Voyons maintenant comment on déterminera les surfaces de nulle résistance.

## II. — RECHERCHE ANALYTIQUE DES SURFACES DE NULLE RÉSISTANCE.

ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES. — SOLUTIONS COMPLÈTES. —  
ÉQUATION GÉNÉRALE EN TERMES FINIS.

La définition que nous avons donnée des surfaces de nulle résistance est susceptible d'une traduction analytique fort simple. En effet, en désignant, suivant l'usage, par  $p$  et  $q$  les dérivées partielles  $\frac{dz}{dx}$  et  $\frac{dz}{dy}$  il faudra exprimer que, pour une pareille surface, la normale dont les cosinus sont proportionnels à  $p, q$  et  $-1$  est perpendiculaire à la droite dont les cosinus sont proportionnels à  $u, v, w$ , ce qui donne immédiatement l'équation

Équation  
aux différences  
partielles.

$$(8) \quad up + vq = w,$$

équation aux différences partielles du premier ordre qui s'intégrera par les procédés habituels.

Pour obtenir l'équation en  $x, y, z$ , il faudra donc préalablement connaître les expressions de  $u, v, w$  à l'aide de ces mêmes variables, et, comme l'intégration des équations du mouvement est en général impossible, il semble tout d'abord qu'il n'y ait pas lieu de rechercher une équation générale qui convienne à ces surfaces.

On aurait tort de s'arrêter là néanmoins, car il est possible que les équations de ces surfaces puissent s'exprimer à l'aide des éléments  $u, v, w, p, \rho$ , ou tout autre défini à l'avance, sans qu'il soit nécessaire de connaître leur détermination en  $x, y$  et  $z$ ; et il y aurait dès lors intérêt, au point de vue géométrique, à connaître cette expression, bien qu'elle ne se prêtât à aucune application numérique. C'est pourquoi, au lieu de rechercher la solution générale de l'équation ci-dessus, laquelle doit renfermer une fonction arbitraire, nous envisagerons d'abord les solutions particulières, connues sous le nom de *solutions complètes*, c'est-à-dire celles qui renferment seulement une constante arbitraire, et qui, par conséquent, peuvent être mises sous la forme

$$\Phi(x, y, z) = \text{const.},$$

où  $\Phi$  est une fonction parfaitement déterminée, mais actuellement inconnue, que nous allons nous proposer de rechercher.

Pour cela, nous déduirons de cette dernière équation les valeurs de  $p$  et de  $q$ , et nous les reporterons dans l'équation (8), ce qui nous donnera la suivante :

$$(9) \quad u \frac{d\Phi}{dx} + v \frac{d\Phi}{dy} + w \frac{d\Phi}{dz} = 0,$$

ainsi que nous aurions pu d'ailleurs l'écrire immédiatement.

Interprétation  
mécanique  
de cette équation.

Or cette seconde forme, outre sa symétrie, a un avantage considérable : elle exprime immédiatement une propriété importante du mouvement, à savoir que l'élément caractérisé par la fonction  $\Phi(x, y, z)$  conserve invariablement la même grandeur pour une même molécule. En effet, le temps n'entrant pas explicitement dans la fonction  $\Phi$ , sa dérivée totale, prise en considérant  $x, y, z$  comme des fonctions de  $t$ , sera

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) = \frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\Phi}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{d\Phi}{dz} \frac{dz}{dt} \quad (1),$$

ce qui n'est autre chose que le premier membre de l'équation (9), en raison des définitions admises

$$(10) \quad u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

et, par conséquent, la fonction  $\Phi$  considérée pour une même molécule ne varie pas avec le temps.

La question est donc réduite à rechercher quels sont les éléments caractéristiques d'une molécule qui restent invariables dans son mouvement.

Première solution  
complète.

Il en est un tout d'abord qui se présente tout naturellement à l'esprit : c'est sa masse ; et il résulte immédiatement de ce qui précède qu'en égalant son expression à une constante nous obtiendrons une première famille de surfaces de nulle résistance.

Cas des liquides.

En effet, si le fluide est incompressible, la molécule qui occupe actuellement le volume  $v$  conservera indéfiniment ce même volume ; il s'ensuit qu'en un point quelconque de sa trajectoire sa masse aura pour expression  $v\rho$ , laquelle expression devra, en vertu de la remarque faite plus haut, vérifier l'équation différentielle (9), et l'on doit avoir par conséquent, en supprimant le facteur constant  $v$ , l'équation

$$(11) \quad u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz} = 0,$$

qui est bien effectivement une des équations du problème dans le cas des liquides hétérogènes.

Il suit de là que l'équation

$$(12) \quad \rho = \text{const.}$$

---

(<sup>1</sup>) Nous écrivons ce terme entre parenthèses pour marquer une dérivée totale prise par rapport au temps, lequel n'entre explicitement dans aucune des expressions considérées.

est alors une des solutions cherchées, et que, par conséquent, les *surfaces d'égale densité* constituent dans ce cas une première famille de surfaces de nulle résistance.

Si, au contraire, le fluide est compressible, la molécule qui occupe actuellement le volume infiniment petit  $v$  occupera, au bout d'un certain temps, le volume  $v' = v(1 + \Delta)$ , la quantité  $\Delta$ , qui peut être positive ou négative, mesurant la dilatation relative au déplacement considéré. Or, comme il y a intérêt à pouvoir comparer les dilatations correspondant à divers déplacements de la même molécule, ou même des différentes molécules entre elles, il convient de compter ces déplacements et les dilatations auxquelles ils donnent lieu, à partir d'une position définie pour chaque molécule, par exemple à partir de son passage sur une même surface, arbitrairement choisie, qui rencontre toutes les trajectoires fluides, et que nous pourrons appeler, à cause de cela, *surface origine des dilatations*.

Cas des fluides compressibles.

Nous définirons donc la quantité  $\Delta$  par cette condition que,  $v_0$  étant le volume de la molécule lors de son passage sur cette surface, son volume en un point quelconque de sa trajectoire soit exprimé par la quantité

Définition de la dilatation.

$$(13) \quad v = v_0(1 + \Delta),$$

qu'il s'agisse de positions antérieures ou postérieures à son passage sur cette surface. La quantité  $\Delta$ , que nous appellerons *dilatation*, aura alors une valeur parfaitement déterminée en chaque point, et nous montrerons tout à l'heure comment on obtiendra son expression en  $x$ ,  $y$  et  $z$ ; mais on comprend dès maintenant que la connaissance de cette fonction permettra d'apprécier les dilatations correspondant à un déplacement quelconque; car, si nous considérons successivement deux positions de la même molécule, où les volumes soient respectivement  $v$  et  $v'$ , et les dilatations  $\Delta$  et  $\Delta'$ , des deux équations

$$v = v_0(1 + \Delta) \quad \text{et} \quad v' = v_0(1 + \Delta'),$$

on tirera sans difficulté

$$v' - v = v_0(\Delta' - \Delta),$$

et par conséquent

$$\frac{v' - v}{v} = \frac{\Delta' - \Delta}{1 + \Delta},$$

rapport qui exprime la dilatation correspondant au déplacement considéré.

Il convient en même temps de préciser le sens que nous devons attacher au mot *molécule*, que nous avons employé jusqu'ici pour désigner une portion quelconque infiniment petite de la masse fluide; car, du moment que

nous nous proposons de trouver une expression de la masse moléculaire en chaque point, il importe de définir comment nous comprenons la division de la masse fluide en portions infiniment petites, auxquelles nous attribuons le nom de *molécules*. C'est ce que nous ferons, en entendant désormais par ce mot « *toute portion de la masse fluide qui occupait un même volume infiniment petit  $v_0$ , lors de son passage sur la surface prise pour origine des dilatations.* » Il est évident, d'ailleurs, que cette définition correspondrait, pour le cas des liquides, à la division de la masse en volumes infiniment petits, tous égaux à  $v_0$ .

Expression  
de la  
masse moléculaire.

À l'aide de ces deux conventions, le volume de la molécule étant exprimé en un point quelconque par la quantité  $v_0(1 + \Delta)$ , sa masse le sera de même par la quantité  $\rho v_0(1 + \Delta)$ ,  $\rho$  et  $\Delta$  étant les valeurs de la densité et de la dilatation relatives à ce point. Cette quantité devant demeurer constante dans le mouvement de la molécule, il s'ensuit qu'on devra avoir, comme nous l'avons déjà expliqué,

$$u \frac{d \cdot \rho v_0(1 + \Delta)}{dx} + v \frac{d \cdot \rho v_0(1 + \Delta)}{dy} + w \frac{d \cdot \rho v_0(1 + \Delta)}{dz} = 0,$$

ou, en supprimant le facteur commun  $v_0$ ,

$$(14) \quad u \frac{d \cdot \rho(1 + \Delta)}{dx} + v \frac{d \cdot \rho(1 + \Delta)}{dy} + w \frac{d \cdot \rho(1 + \Delta)}{dz} = 0.$$

Cette équation donne lieu aux observations suivantes :

En premier lieu, la dilatation  $\Delta$ , dont la connaissance permet seule d'apprécier les variations de volume éprouvées par les différentes parties de la masse fluide, doit être considérée comme une nouvelle fonction inconnue de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , analogue aux fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$  et  $\rho$ , qui figurent dans les équations (6) et (7), et l'équation précédente, analogue à l'équation (11) dans le cas des liquides, est précisément celle qui permettra d'arriver à sa détermination <sup>(1)</sup>; car, si l'on suppose connue l'expression de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $\rho$ , à

<sup>(1)</sup> Si l'on développe l'équation (14) de la façon suivante :

$$\frac{1}{1 + \Delta} \left[ u \frac{d(1 + \Delta)}{dx} + v \frac{d(1 + \Delta)}{dy} + w \frac{d(1 + \Delta)}{dz} \right] = -\frac{1}{\rho} \left( u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz} \right),$$

et qu'on la rapproche de l'équation (7) préparée de la même manière, c'est-à-dire mise sous la forme

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{\rho} \left( u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz} \right),$$

obtiendra immédiatement par comparaison la suivante :

$$(14 \text{ bis}) \quad u \frac{d \cdot l(1 + \Delta)}{dx} + v \frac{d \cdot l(1 + \Delta)}{dy} + w \frac{d \cdot l(1 + \Delta)}{dz} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$



l'aide des équations (6) et (7),  $\Delta$  sera déterminé par la condition de vérifier l'équation (14), et, en outre, de se réduire à zéro tout le long de la surface prise pour origine des dilatations. On peut dire de la sorte que le problème du mouvement d'un fluide comporte dans tous les cas la détermination de cinq inconnues, à l'aide des cinq équations (6), (7) et (14), puisque, dans le cas des liquides, la dilatation disparaissant, les équations (11) et (14) se confondent, et que, dans le cas des fluides compressibles, la pression et la densité étant fonction l'une de l'autre ne forment plus à proprement parler qu'une seule inconnue.

En second lieu, l'équation (14) exprime que l'équation

$$(15) \quad \rho(1 + \Delta) = \text{const.}$$

satisfait à l'équation (9), c'est-à-dire à l'équation différentielle des surfaces de nulle résistance. Or, si l'on suppose dans cette équation  $\rho$  et  $\Delta$  exprimés en  $x, y, z$ , on aura une famille de surfaces telles, que la masse moléculaire, dont nous avons donné tout à l'heure l'expression (p. 18), aura la même grandeur en tous les points d'une même surface, et qu'on pourra conséquemment appeler *surfaces d'égale masse moléculaire*, ou simplement *surfaces d'égale masse*. D'ailleurs, l'équation (15) se réduisant à l'équation (12) par la supposition  $\Delta = 0$ , la solution relative au cas des liquides

qui ne diffère de celle donnée par Cauchy (réduite au cas du mouvement permanent) que par le changement de  $\Delta$  en  $l(1 + \Delta)$ , et se confond par conséquent avec elle, si l'on suppose  $\Delta$  très-petit (voir *Exercices de Mathématiques*, t. III, p. 130).

Cette hypothèse est effectivement contenue dans les raisonnements que présente l'illustre géomètre pour établir cette équation, bien qu'il ne l'énonce pas explicitement.

Pour le montrer, adoptons, pour un instant, ses notations, c'est-à-dire désignons, non plus par  $\Delta$ , mais par  $v$  la *dilatation* que nous nous proposons de déterminer, et par  $\Delta$  une simple caractéristique de différentiation. La fonction  $v$ , pour avoir un sens, devra nécessairement exprimer une grandeur comptée pour chaque molécule à partir d'une position fixe et déterminée  $(x_0, y_0, z_0)$ ; il en résulte que la dilatation correspondant à un déplacement fini, compté à partir d'un point quelconque  $(x, y, z)$  jusqu'à un point  $(x', y', z')$ , sera exprimée par le rapport  $\frac{v' - v}{1 + v}$ , ainsi que nous l'avons établi, page 17; d'où il suit que la *dilatation instantanée*, c'est-à-dire celle correspondant à un déplacement infiniment petit quelconque aura pour expression

$$(14 \text{ ter}) \quad \theta \Delta t = \frac{\Delta v}{1 + v},$$

et l'on ne pourrait prendre  $\theta \Delta t = \Delta v$ , comme le fait Cauchy, que pour le premier instant, à partir de la position prise pour origine, ou à la condition de supposer  $v$  constamment très-petit.

Si l'on n'admet pas cette hypothèse, les raisonnements formulés par Cauchy conduisent alors avec la valeur (14 ter) à l'équation ci-dessus (14 bis), qui concorde parfaitement, comme nous venons de le voir, avec l'équation (14), à laquelle nous avons été conduit par une autre méthode.

se trouve comprise dans celle-ci, en sorte que l'on peut dire, dans tous les cas, que les *surfaces d'égale masse*, représentées par l'équation (15), constituent une première famille de surfaces de nulle résistance.

Définitions : Avant d'en montrer une seconde, nous allons compléter les définitions qui précèdent par deux autres qui s'y rattachent immédiatement.

(a) du volume primitif, D'abord il résulte de l'équation (13) que la molécule qui occupe actuellement le volume  $v$  occupait, lors de son passage sur la surface origine des dilatations, le volume

$$v_0 = \frac{v}{1 + \Delta},$$

qu'on peut appeler en raison de cela son volume primitif. Étendant cette même locution à une portion finie quelconque de la masse fluide, nous appellerons *volume primitif* de cette masse la somme des volumes primitifs de tous les éléments qui la composent, ou, en d'autres termes, l'intégrale  $\iiint \frac{dx dy dz}{1 + \Delta}$  étendue à tout le volume actuel de la masse considérée; on voit que ce volume est précisément celui qu'occuperait cette masse, si chacun des éléments qui la composent avait conservé le volume qu'il occupait lors de son passage sur la surface origine des dilatations.

(b) de la dilatation totale. En second lieu, l'accroissement de volume subi par la molécule, depuis son passage sur la surface origine des dilatations jusqu'à sa position actuelle, est mesuré par la différence

$$v - v_0 = v - \frac{v}{1 + \Delta} = v \left( 1 - \frac{1}{1 + \Delta} \right) = v \frac{\Delta}{1 + \Delta}.$$

La somme des accroissements analogues correspondant à tous les éléments d'une portion finie de la masse sera ce que nous appellerons la *dilatation totale* de cette masse. On voit qu'elle aura pour expression l'intégrale  $\iiint \frac{\Delta}{1 + \Delta} dx dy dz$  étendue à tout le volume de la masse considérée, et qu'elle exprime la différence entre son volume actuel et ce que nous avons appelé son *volume primitif*.

Ces définitions posées, poursuivons maintenant la recherche des surfaces de nulle résistance.

Deuxième solution complète. Il existe un autre élément caractéristique de la molécule, qui reste invariable pendant le mouvement, et qui, par conséquent, devra fournir une nouvelle solution de l'équation (9), c'est l'*énergie*; car cette expression, empruntée à la théorie mécanique de la chaleur, est définie précisément par cet énoncé du théorème des forces vives que, *dans le mouvement d'un*

*point matériel, son énergie reste constante.* Nous n'aurons donc qu'à former l'équation des forces vives pour la molécule fluide, et, en égalant à un paramètre arbitraire l'ensemble des termes variables (ou énergie moléculaire), nous aurons une nouvelle famille de surfaces de nulle résistance.

Or, si l'on conserve les notations déjà employées, celle équation est la suivante :

$$\frac{1}{2} m(V^2 - V_0^2) = \int_0^t m(\mathcal{X} dx + \mathcal{Y} dy + \mathcal{Z} dz),$$

en affectant de l'indice 0 les termes relatifs à la position initiale.

La force totale qui sollicite la molécule, et dont les composantes figurent dans cette équation, se compose, comme l'on sait, de deux éléments : les forces extérieures qui s'exercent sur toute sa masse, et dont nous avons déjà représenté les composantes par  $mX$ ,  $mY$ ,  $mZ$ , et les forces intérieures ou pressions qui s'exercent sur la surface de la molécule seulement. Le procédé par lequel on évalue ces dernières forces est fort connu ; nous ne le rappellerons donc pas ici, et nous poserons immédiatement

$$m\mathcal{X} = m \left( X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right), \quad m\mathcal{Y} = m \left( Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} \right), \quad m\mathcal{Z} = m \left( Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \right);$$

car c'est précisément en égalant ces composantes à zéro que l'on obtient les équations d'équilibre des fluides.

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation qui précède, on pourra faire sortir du signe  $\int$  le facteur  $m$ , qui est, par hypothèse, constant par rapport au temps, ce qui donnera l'équation

$$\frac{1}{2} m(V^2 - V_0^2) = m \int_0^t \left[ \left( X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right) dx + \left( Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} \right) dy + \left( Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \right) dz \right],$$

ou, sous une forme plus concise,

$$(16) \quad \frac{1}{2} m(V^2 - V_0^2) = m(q - q_0),$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$q = \int \left[ \left( X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right) dx + \left( Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} \right) dy + \left( Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \right) dz \right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$q = \int (X dx + Y dy + Z dz) - \int \frac{1}{\rho} \left( \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz \right).$$

Or, si l'on considère les différentielles totales correspondant à un accroissement du temps  $dt$ , et que l'on suppose, suivant l'usage, que les composantes des forces extérieures soient les dérivées partielles d'une même fonction  $F(x, y, z)$ , on aura

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz = dp, \\ X dx + Y dy + Z dz = dF, \end{cases}$$

de sorte que la fonction  $q$ , à laquelle nous donnerons tout à l'heure un nom, pourra s'écrire simplement

$$(18) \quad q = F(x, y, z) - \int \frac{dp}{\rho},$$

et il n'y aura qu'à substituer cette expression dans l'équation (16) pour avoir l'équation des forces vives.

Il est à remarquer que l'intégrale qui figure dans cette dernière expression peut toujours s'exprimer en termes finis; car, d'une part, si le fluide est incompressible, le facteur  $\rho$  étant alors constant par rapport au temps pourra sortir du signe  $\int$ , en sorte que l'intégrale se réduira simplement à  $\frac{p}{\rho}$ ; et si, d'autre part, le fluide est compressible, la densité étant alors liée à la pression par une équation de la forme  $\rho = f(p)$ , l'intégrale  $\int \frac{dp}{\rho}$  a alors un sens parfaitement déterminé, qu'on peut supposer exprimé par une fonction finie  $\mathcal{F}(p)$ . On voit d'ailleurs que, pour l'intelligence de la formule (18), on peut faire abstraction de la considération du temps qui a servi à l'établir, et supposer dès lors que les signes  $\int$  et  $d$  qui y figurent se rapportent simplement à la variable  $p$ , considérée pour un instant comme variable indépendante; car on obtient de cette façon pour la valeur de  $q$  les mêmes expressions que nous venons d'établir. L'expression (18) de  $q$  prend alors une signification intrinsèque parfaitement précise, qui est celle que nous lui attribuerons désormais.

Définitions :

Cela posé, arrêtons-nous quelques instants sur cette équation (16), pour établir encore quelques définitions qui nous seront utiles dans le paragraphe suivant :

(a) de la force vive,

1° Le premier membre de cette équation représentant le demi-accroissement de la force vive de la molécule de masse  $m$  dans le déplacement considéré, la force vive moléculaire a pour expression en un point quelconque  $mV^2$ , et la somme d'expressions analogues correspondant

à tous les éléments d'une portion finie du fluide constituerait la force vive totale de cette masse ; mais, afin de n'introduire dans notre analyse que des quantités finies, nous considérerons, au lieu et place de la force vive moléculaire, son rapport à la masse moléculaire  $m$ , c'est-à-dire la quantité

$$(19) \quad V^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

que nous appellerons *force vive au point*  $(x, y, z)$ , ou simplement la *force vive*, de même que, dans l'évaluation des pressions, on appelle *pression au point*  $(x, y, z)$  le rapport de la pression effective qui s'exerce sur un élément situé en ce point à l'aire de cet élément.

D'ailleurs, la force vive moléculaire relative à un élément de masse quelconque  $\varpi = \rho dx dy dz$  ayant ainsi pour expression

$$\varpi V^2 = \rho V^2 dx dy dz,$$

la *force vive totale* correspondant à une portion déterminée du fluide sera exprimée par la somme

$$\mathbf{S} \varpi V^2 = \iiint \rho V^2 dx dy dz,$$

étendue à tout le volume de cette portion du fluide.

2° Le second membre de cette même équation (16) exprime le travail accompli par la molécule  $m$  dans son déplacement. La quantité que nous avons appelée  $q$  étant une fonction parfaitement déterminée en  $x$ ,  $y$  et  $z$ , il suit de là que, si nous considérons l'ensemble des points  $(x_0, y_0, z_0)$  qui satisfont à l'équation  $q_0 = 0$ , le second membre de l'équation (16), qui se réduit alors à  $mq$ , représentera le travail produit par la molécule de masse  $m$  en arrivant à sa position actuelle, à partir de son passage sur la surface  $q_0 = 0$ , que nous appellerons à cause de cela *surface origine du travail*. Si donc nous convenons de ne considérer que des déplacements comptés à partir de cette surface, le travail moléculaire aura pour expression  $mq$  ; et, si nous nous laissons guider par les mêmes considérations que précédemment à propos de la force vive, la quantité  $q$  pourra s'appeler le *travail au point*  $(x, y, z)$ , ou simplement le *travail*. Une somme de travaux moléculaires pris dans les mêmes conditions, ou, en d'autres termes, l'intégrale

(b) du travail,

$$\mathbf{S} \varpi q = \iiint q \rho dx dy dz,$$

étendue à tout l'intérieur d'une surface quelconque, sera par ailleurs ce que nous appellerons le *travail total* correspondant à cette surface.

3° Enfin, si l'on sépare dans l'équation (16) les termes variables des termes constants, en l'écrivant de la façon suivante :

(c) de l'énergie.

$$(20) \quad m \left( \frac{1}{2} V^2 - q \right) = m \left( \frac{1}{2} V_0^2 - q_0 \right),$$

le premier membre sera ce que dans la théorie de la chaleur on appellerait l'*énergie moléculaire*, et la somme d'expressions analogues, correspondant à tous les éléments d'un système, serait l'énergie du système. Adoptant donc cette locution et agissant comme nous l'avons fait pour la force vive et le travail, nous considérerons plus spécialement le rapport de l'énergie moléculaire à la masse moléculaire, c'est-à-dire la fonction

$$(21) \quad \varphi = \frac{1}{2} V^2 - q,$$

que nous appellerons *énergie au point*  $(x, y, z)$ , ou simplement *énergie*; et l'*énergie totale*, correspondant à une partie définie du fluide, sera de même l'intégrale

$$\mathbf{S} \varpi \varphi = \iiint \varphi \rho \, dx \, dy \, dz,$$

étendue à tout le volume de la masse considérée.

Si l'on remplace d'ailleurs, dans l'équation de définition (21),  $q$  et  $V^2$  par leurs valeurs (18) et (19), l'énergie  $\varphi$  sera exprimée au moyen des éléments habituellement considérés de la façon suivante :

$$(22) \quad \varphi = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - F(x, y, z) + \int \frac{dp}{\rho}.$$

Surfaces  
d'égale énergie.

Ces nouvelles définitions étant admises, revenons à l'objet que nous avons plus particulièrement en vue dans ce paragraphe, qui est la recherche des surfaces de nulle résistance.

Si l'on divise par  $m$  les deux membres de l'équation (20), cette équation pourra s'écrire

$$\frac{1}{2} V^2 - q = \frac{1}{2} V_0^2 - q_0,$$

ou plus simplement, à l'aide de la notation que nous venons d'adopter,

$$(23) \quad \varphi = \text{const.},$$

la fonction  $\varphi$  étant définie par les équations (21) ou (22).

Si d'ailleurs on différentie cette dernière équation par rapport au temps, on aura, en vertu des équations (10)

$$(24) \quad \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) = u \frac{d\varphi}{dx} + v \frac{d\varphi}{dy} + w \frac{d\varphi}{dz} = 0 \quad (1),$$

c'est-à-dire que l'équation (23) vérifiera l'équation différentielle (9) ; et par conséquent, en considérant  $\varphi$  comme une fonction déterminée de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , la famille de surfaces représentée par cette équation, que l'on peut appeler *surfaces d'égal énergie*, constituera une deuxième famille de surfaces de nulle résistance.

Avant de déduire des résultats que nous avons déjà acquis les conséquences qu'ils renferment, revenons un instant sur ce qui précède pour établir d'une autre façon l'équation si importante des *forces vives*. Nous l'avons formée immédiatement tout à l'heure, en appliquant le théorème du travail au mouvement de la molécule fluide ; mais on sait que cette équation est une intégrale des équations du mouvement, toutes les fois que le temps n'entre pas explicitement dans l'expression des liaisons. Cette condition étant évidemment remplie dans le cas actuel, par suite de l'hypothèse de la permanence, il y a intérêt à montrer comment on peut obtenir analytiquement cette équation par l'intégration directe des équations du mouvement : c'est ce que nous allons faire en peu de mots.

Pour cela il faut, comme l'on sait, multiplier les équations du mouvement respectivement par  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  et faire la somme, et l'on doit arriver ainsi à une différentielle exacte ; mais, dans le cas actuel, cette forme n'apparaît pas immédiatement, parce que, pour établir les équations (6), on a remplacé partout dans l'expression des forces d'inertie  $\frac{dx}{dt}$  par  $u$ ,  $\frac{dy}{dt}$  par  $v$ ,  $\frac{dz}{dt}$  par  $w$ , il faut donc, pour que cette forme apparaisse, rétablir à la place de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  leurs valeurs (10), ou, ce qui revient au même, remplacer dans le calcul  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  par leurs valeurs

$$dx = u dt, \quad dy = v dt, \quad dz = w dt;$$

d'où, en conséquence, la série d'opérations suivantes.

Multiplions les équations (6) respectivement par  $u dt$ ,  $v dt$ ,  $w dt$ , et ajoutons en rapprochant les termes situés sur une même colonne verticale, et, faisant ressortir les facteurs communs, nous obtiendrons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left( \frac{dp}{dx} u dt + \frac{dp}{dy} v dt + \frac{dp}{dz} w dt \right) &= Xu dt + Yv dt + Zw dt \\ &- u \left( u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} + w \frac{dw}{dx} \right) dt \\ &- v \left( u \frac{du}{dy} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dw}{dy} \right) dt \\ &- w \left( u \frac{du}{dz} + v \frac{dv}{dz} + w \frac{dw}{dz} \right) dt, \end{aligned}$$

---

(<sup>1</sup>) Même remarque qu'à la page 16.

ou, en remettant à présent  $dx, dy, dz$  à la place de leurs valeurs  $u dt, v dt, w dt$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left( \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz \right) &= X dx + Y dy + Z dz \\ &- \left( u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} + w \frac{dw}{dx} \right) dx \\ &- \left( u \frac{du}{dy} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dw}{dy} \right) dy \\ &- \left( u \frac{du}{dz} + v \frac{dv}{dz} + w \frac{dw}{dz} \right) dz, \end{aligned}$$

Si nous représentons maintenant par la caractéristique  $d$  une différentielle totale prise en considérant  $x, y, z$  comme des fonctions de la variable indépendante  $t$ , et que nous ayons égard aux équations (17), celle qui précède pourra s'écrire simplement

$$\frac{dp}{\rho} = dF - d\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Sous cette forme, le caractère de différentielle exacte est manifeste, car  $\rho$  étant, ainsi que nous l'avons déjà dit, ou constant par rapport au temps, qui est ici la variable indépendante, ou fonction de  $p$ , le premier membre est, dans tous les cas, la différentielle de l'expression  $\int \frac{dp}{\rho}$  entendue comme nous l'avons expliqué (p. 22), et par conséquent l'équation précédente donnera par l'intégration, en faisant passer tous les termes dans un même membre,

$$\int \frac{dp}{\rho} - F(x, y, z) + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \text{const.},$$

équation qui, eu égard à la valeur (22) de  $\varphi$ , se confond bien avec l'équation (23), à laquelle nous avons été conduit directement.

Équation générale  
en termes finis.

Nous avons donc, en résumé, trouvé deux familles de surfaces de nulle résistance, les surfaces d'*égale masse* et les surfaces d'*égale énergie*, dont les équations constituent deux solutions complètes de l'équation différentielle de cette classe de surfaces. Or, cette équation étant du premier ordre, ce résultat suffit pour en obtenir l'intégrale générale.

En effet, si l'on désigne par  $\Psi$  une fonction arbitraire, l'équation

$$\Psi[\rho(1 + \Delta), \varphi] = 0$$



donnera évidemment

$$\begin{aligned}
 & u \frac{d\Psi}{dx} + v \frac{d\Psi}{dy} + w \frac{d\Psi}{dz} \\
 &= \frac{d\Psi}{d \cdot \rho(1 + \Delta)} \left[ u \frac{d \cdot \rho(1 + \Delta)}{dx} + v \frac{d \cdot \rho(1 + \Delta)}{dy} + w \frac{d \cdot \rho(1 + \Delta)}{dz} \right] \\
 & \quad + \frac{d\Psi}{d\varphi} \left( u \frac{d\varphi}{dx} + v \frac{d\varphi}{dy} + w \frac{d\varphi}{dz} \right) = 0;
 \end{aligned}$$

car les deux facteurs entre parenthèses, qui figurent dans le second membre, sont identiquement nuls, en vertu des équations (14) et (24).

L'équation ci-dessus vérifie donc l'équation aux différences partielles (9) ou (8), et comme elle renferme d'ailleurs une fonction arbitraire permettant de réduire  $z$  à une fonction donnée de  $y$  pour  $x = 0$ , c'est bien l'intégrale générale de l'équation (8).

Si on la résout par rapport à  $\varphi$ , et qu'on remplace ensuite cette fonction par sa valeur (22), cette même équation pourra s'écrire sous la forme plus explicite

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - F(x, y, z) + \int \frac{dp}{\rho} = \psi[\rho(1 + \Delta)],$$

en désignant par  $\psi$  une fonction arbitraire.

Telle est l'équation générale des surfaces *de nulle résistance*, exprimée à l'aide des éléments habituellement considérés du mouvement.

### III. — ÉTUDE PARTICULIÈRE DES SURFACES D'ÉGALE MASSE ET D'ÉGALE ÉNERGIE.

#### REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT. — PROPRIÉTÉS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM.

Les deux grandes familles de surfaces que nous avons rencontrées dans le paragraphe précédent, et dont les équations sont les solutions complètes de l'équation différentielle des surfaces de nulle résistance, fournissent immédiatement une image très-nette du mouvement, ce qui était le but que nous nous étions proposé en commençant cette étude.

Détermination  
géométrique :

En effet, chaque molécule étant assujettie à rester séparément sur l'une des surfaces appartenant à chacune des deux familles, puisque ce sont toutes deux des surfaces de *nulle résistance*, nous pouvons formuler immédiatement la proposition suivante :

(a) de la trajectoire,

THÉORÈME V. — *La trajectoire de chaque molécule est l'intersection des deux surfaces d'égale masse et d'égale énergie, qui contiennent sa position initiale.*

(b) de la vitesse.

On voit ainsi comment ces deux familles de surfaces partagent la masse fluide en couches infiniment minces dont les intersections constituent précisément ces *filets fluides*, constants de forme et d'apparence, qui ne sont autre chose que la succession des molécules soumises aux mêmes influences.

La trajectoire de la molécule étant ainsi définie par l'intersection de deux surfaces, son mouvement serait complètement déterminé, si l'on avait un moyen simple de se représenter la vitesse en chaque point. Cette seconde image nous sera fournie par le théorème suivant, que nous établirons, comme les précédents, de deux façons différentes :

THÉORÈME VI. — *La grandeur de la vitesse est moyenne proportionnelle entre le rayon de courbure de la section normale de la surface d'égale énergie qui contient sa direction, et la composante de la force totale qui sollicite l'unité de masse, dirigée suivant la normale à cette surface.*

Démonstration  
synthétique.

Pour établir cette proposition, décomposons dans le plan osculateur de la trajectoire a force totale  $m\mathcal{F}$  qui sollicite la molécule  $m$  en deux composantes, l'une *tangentielle*, et l'autre *normale* ou *centripète* ; on sait que cette dernière aura pour expression

$$m\mathcal{F}_c = \frac{mV^2}{R_0}, \quad \text{ou pour l'unité de masse} \quad \mathcal{F}_c = \frac{V^2}{R_0},$$

$R_0$  étant le rayon de courbure de la trajectoire situé dans le plan osculateur. Or, si nous considérons en même temps que ce plan la section normale de la surface d'égale énergie qui contient la direction de la vitesse, nous aurons, d'après le théorème de Meunier <sup>(1)</sup>, en appelant  $R_n$  le rayon de courbure de cette section, et  $\varepsilon$  l'angle de ces deux plans, ou encore l'angle de ces rayons entre eux,

$$R_0 = R_n \cos \varepsilon,$$

et par conséquent, en substituant dans l'équation précédente,

$$\mathcal{F}_c = \frac{V^2}{R_n \cos \varepsilon}, \quad \text{d'où} \quad V^2 = R_n \mathcal{F}_c \cos \varepsilon.$$

Or  $\mathcal{F}_c \cos \varepsilon$  n'est autre chose que la composante de la force totale  $\mathcal{F}$  suivant la normale à la surface, et que nous représentons par  $\mathcal{F}_n$ . En effet, pour

<sup>(1)</sup> Voir STURM, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, t. II, n° 698, p. 202.

obtenir la composante d'une force suivant une droite, on peut projeter d'abord cette force sur un plan quelconque passant par la droite, puis projeter ensuite cette projection sur la droite elle-même. Or si l'on considère le plan normal à la trajectoire au point considéré, lequel contient à la fois la normale principale de la trajectoire et la normale à la surface d'égale énergie,  $\mathcal{F}_c$  sera évidemment la projection de la force totale  $\mathcal{F}$  sur ce plan, et de même  $\mathcal{F}_c \cos \varepsilon$  sera dans ce plan la projection de cette projection sur la normale à la surface au point considéré.

L'équation précédente peut donc s'écrire

$$(25) \quad V^2 = R_n \mathcal{F}_n,$$

ce qui justifie la proposition énoncée.

On peut aussi déduire ce résultat des équations du mouvement ; car de même que l'équation (24), qui est la dérivée totale de l'équation (23) par rapport au temps, exprime une propriété différentielle du premier ordre, c'est-à-dire relative au plan tangent des surfaces d'égale énergie, de même la dérivée seconde devra exprimer une propriété différentielle du second ordre, c'est-à-dire relative à la courbure des mêmes surfaces.

Démonstration  
analytique.

On trouve, en effet, en différentiant l'équation (24),

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right) &= u \frac{d \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)}{dt} + v \frac{d \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)}{dt} + w \frac{d \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)}{dt} \\ &\quad + \frac{du}{dt} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dv}{dt} \frac{d\varphi}{dy} + \frac{dw}{dt} \frac{d\varphi}{dz} = 0. \end{aligned}$$

Or, comme on a, en vertu des équations (10) et (1),

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)}{dt} &= u \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + v \frac{d^2 \varphi}{dx dy} + w \frac{d^2 \varphi}{dx dz}, \\ \frac{d \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)}{dt} &= u \frac{d^2 \varphi}{dx dy} + v \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + w \frac{d^2 \varphi}{dx dz}, \\ \frac{d \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)}{dt} &= u \frac{d^2 \varphi}{dx dz} + v \frac{d^2 \varphi}{dy dz} + w \frac{d^2 \varphi}{dz^2}, \\ \frac{du}{dt} &= \mathcal{X}, \quad \frac{dv}{dt} = \mathcal{Y}, \quad \frac{dw}{dt} = \mathcal{Z}, \end{aligned} \right.$$

si l'on ajoute ces équations respectivement multipliées par  $u, v, w, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ , l'équation précédente pourra s'écrire

$$u^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + v^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + w^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2vw \frac{d^2\varphi}{dy dz} + 2wu \frac{d^2\varphi}{dz dx} + 2uv \frac{d^2\varphi}{dx dy} + \mathcal{X} \frac{d\varphi}{dx} + \mathcal{Y} \frac{d\varphi}{dy} + \mathcal{Z} \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

forme très-symétrique, analogue à celle de l'équation (24), mais d'un degré plus élevé.

Pour trouver la signification de cette équation, il n'y a qu'à remplacer les composantes  $u, v, w$  par leurs valeurs (5), et à diviser tous les termes par  $\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}$ . On obtient ainsi, en séparant en deux membres et supposant que le radical emporte avec lui son signe,

$$-V^2 \frac{\frac{d^2\varphi}{dx^2} \cos^2 \lambda + \frac{d^2\varphi}{dy^2} \cos^2 \mu + \frac{d^2\varphi}{dz^2} \cos^2 \nu + 2 \frac{d^2\varphi}{dy dz} \cos \mu \cos \nu + 2 \frac{d^2\varphi}{dz dx} \cos \nu \cos \lambda + 2 \frac{d^2\varphi}{dx dy} \cos \lambda \cos \mu}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}} = \frac{\mathcal{X} \frac{d\varphi}{dx} + \mathcal{Y} \frac{d\varphi}{dy} + \mathcal{Z} \frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}$$

Sous cette forme, on reconnaît au premier membre, dans le coefficient de  $V^2$ , l'expression de la courbure de la section normale de la surface  $\varphi = \text{const.}$ , qui contient la direction  $(\lambda, \mu, \nu)$ , c'est-à-dire la vitesse<sup>(1)</sup>, et dans le second membre la composante de la force totale suivant la normale à la même surface.

Cette équation peut donc s'écrire, en empruntant la notation déjà usitée,

$$V^2 \frac{1}{R_n} = \mathcal{F}_n,$$

et par conséquent coïncide avec l'équation (25), qui exprime le théorème VI.

Notons d'ailleurs que cette proposition n'a rien de spécial aux surfaces d'égale énergie, et nous eussions pu tout aussi bien, pour le but que nous avons en vue, considérer les surfaces d'égale masse, ou toute autre surface

<sup>(1)</sup> Voir MOIGNO, *Leçons de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, t. II (3<sup>e</sup> Leçon) § 186, p. 350.

d'égale résistance. Si nous avons spécifié les surfaces d'égale énergie dans l'énoncé de notre théorème, c'est qu'elles sont les seules qui subsistent dans tous les cas, et que nous allons avoir à faire usage de cette propriété, spécialement dans le cas des liquides homogènes, où elles subsistent seules, et que nous allons maintenant examiner.

La considération des surfaces d'égale masse et d'égale énergie, jointe à la connaissance de la force totale qui sollicite la molécule, fournira donc, en général, une représentation très-simple et très-nette du mouvement de cette molécule. Cette image fait malheureusement défaut, du moins telle que nous venons de la présenter dans le cas particulier des liquides homogènes ; car alors, d'une part, la dilatation étant constamment nulle à cause de l'incompressibilité du fluide, et, de l'autre, la densité se réduisant à une constante à cause de son homogénéité, la première des deux familles de surfaces de nulle résistance disparaît ; mais, même encore dans ce cas, il est facile d'obtenir une représentation très-simple du mouvement au moyen des mêmes éléments.

Cas particulier des  
liquides homogènes.

Pour cela, remarquons tout d'abord que, d'une part, l'équation (21) pouvant s'écrire  $V^2 = 2(\varphi + q)$ , et s'énoncer par cette formule : « *La force vive (ou le carré de la vitesse) est le double de la somme de l'ÉNERGIE et du TRAVAIL* » ; que, d'autre part, le travail  $q$  étant alors le *potentiel* de la force totale qui sollicite l'unité de masse, il en résulte qu'on connaîtra immédiatement la grandeur de la vitesse, si l'on suppose connues l'énergie et la force totale en chaque point.

Il n'y a donc à déterminer réellement, dans ce cas, que la trajectoire. Or la connaissance de la grandeur de la vitesse suffit, par le moyen du théorème VI, pour déterminer en même temps sa direction ; car les surfaces d'égale énergie existant toujours, et la trajectoire de la molécule étant contenue tout entière sur l'une de ces surfaces, il est facile de déterminer sa direction en chaque point par l'angle qu'elle forme avec une autre direction définie sur cette surface, par exemple celle des lignes de courbure.

En effet, l'équation (25) donnant immédiatement l'expression du rayon de courbure de la section normale qui contient la vitesse, savoir

$$R_n = \frac{V^2}{\mathcal{F}_n},$$

la connaissance de ce rayon de courbure suffit à déterminer la direction de cette section ; car, si dans le plan tangent et du point considéré comme centre on trace d'une part l'*indicatrice* relative à ce point, ayant pour axes les racines carrées des rayons de courbure principaux, et d'autre part un cercle avec la quantité  $\sqrt{R_n}$  pour rayon, la direction de la vitesse sera nécessairement l'un des deux diamètres communs à ces deux courbes : la

continuité indiquant suffisamment, d'ailleurs, laquelle de ces deux directions on devra prendre en chaque point, puisqu'au point initial la direction de la vitesse est une des données de la question.

En d'autres termes, si l'on désigne par  $R'$  et  $R''$  les deux rayons de courbure principaux, et par  $r$  l'angle de la section normale considérée avec l'une des sections principales, on aura

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R'} \cos^2 r + \frac{1}{R''} \sin^2 r;$$

et par conséquent, eu substituant dans l'équation précédente,

$$\frac{1}{R'} \cos^2 r + \frac{1}{R''} \sin^2 r = \frac{\mathcal{F}_n}{V^2},$$

ou, en résolvant par rapport à l'angle cherché  $r$ ,

$$\text{tang } r = \pm \sqrt{\frac{\frac{\mathcal{F}_n}{V^2} - \frac{1}{R'}}{\frac{1}{R''} - \frac{\mathcal{F}_n}{V^2}}},$$

équation qui détermine en chaque point la direction de la vitesse par rapport aux lignes de courbure de la surface d'*égale énergie*, et qu'on peut considérer en quelque sorte comme l'équation de la trajectoire sur cette surface.

On pourrait aussi appliquer ce dernier mode de représentation au cas des fluides compressibles, puisque le travail  $q$  est encore, dans ce cas, le potentiel relatif à la force totale qui sollicite la molécule; mais il vaut mieux se figurer le mouvement à l'aide du procédé que nous avons décrit tout d'abord, et qui est à la fois plus simple, plus élégant et plus général, et réserver celui que nous venons d'exposer pour le cas des liquides homogènes, qui est le seul pour lequel le premier procédé se trouve en défaut.

Enfin, outre les propriétés générales qui caractérisent toutes les surfaces de nulle résistance, et que nous avons exposées dans le premier paragraphe, les deux familles que nous nous sommes proposé d'étudier spécialement dans celui-ci possèdent encore des propriétés intéressantes de maximum et de minimum qui leur appartiennent en propre et que nous allons établir en terminant ce travail.

Ces deux familles, en effet, en même temps qu'elles appartiennent à la classe importante des surfaces de *nulle résistance*, rentrent aussi dans la catégorie des surfaces dites *représentatives*, c'est-à-dire de celle dont l'équation s'obtient en égalant à un paramètre arbitraire une fonction déterminée de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Or ces différentes surfaces, que l'on est amené à considérer

dans une foule de questions de Mécanique ou de Physique mathématique, telles que la théorie de l'attraction (surfaces de *niveau* ou d'*égal potentiel*), de la chaleur (surfaces *isothermes* ou d'*égale température*), offrent, par suite de leur origine commune, une même propriété, qui se traduit différemment suivant les différentes théories auxquelles elles sont relatives, et qui découle immédiatement des deux propositions suivantes, que nous allons maintenant démontrer.

LEMME I. — Si  $V$  représente une fonction de  $x, y$  et  $z$ , et que l'on compare entre elles les valeurs que prend l'intégrale  $\iiint V dx dy dz$  à l'intérieur de différentes surfaces, la valeur maximum ou minimum de cette intégrale correspondra précisément à la surface  $V = 0$ .

Lemmes relatifs  
aux surfaces  
représentatives.

En effet, posons

$$I = \iiint V dx dy dz,$$

et calculons  $\delta I$  suivant les procédés habituels du calcul des variations ; nous trouverons successivement

$$\begin{aligned} \delta I &= \iiint \delta(V dx dy dz) \\ &= \iiint [\delta V \cdot dx dy dz + V \delta(dx dy dz)] \\ &= \iiint \left[ \left( \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dz} \delta z \right) dx dy dz + V(dy dz \delta dx + dz dx \delta dy + dx dy \delta dz) \right] \\ &= \iiint \left( \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dz} \delta z \right) dx dy dz + \iiint V \left( \frac{d \delta x}{dx} + \frac{d \delta y}{dy} + \frac{d \delta z}{dz} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

ou, en intégrant par parties le second terme et faisant la réduction avec le premier,

$$\delta I = \iint (V \delta x)_1^2 dy dz + \iint (V \delta y)_1^2 dz dx + \iint (V \delta z)_1^2 dx dy,$$

le crochet marqué des indices 1 et 2 signifiant, suivant une notation connue, la différence des valeurs du terme qu'il renferme pour les deux limites de l'intégration.

On peut mettre ces intégrations sous une forme plus saisissante, en remplaçant les intégrales qui y figurent par une sommation relative aux éléments de la surface elle-même. En désignant par  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles de la normale extérieure avec les axes coordonnés, par  $\omega$  l'élément de surface, et par  $\sum$  une sommation s'étendant à toute la surface considérée, une transformation déjà usitée permettra d'écrire

$$\delta I = \sum \omega V (\delta x \cos \alpha + \delta y \cos \beta + \delta z \cos \gamma).$$

Or, sous cette forme, la condition du maximum et du minimum est évidente. En effet, cette condition étant, comme l'on sait, que la variation  $\delta I$  soit nulle, quels que soient  $\delta x$ ,  $\delta y$  et  $\delta z$ , il s'ensuit qu'il faut que l'on ait  $V = 0$ , ce qui justifie la proposition énoncée.

Il sera toujours facile, d'ailleurs, de distinguer si l'on obtient ainsi un maximum ou un minimum, car on voit tout de suite que l'on aura l'un ou l'autre suivant que la fonction  $V$  prendra des valeurs négatives ou positives, pour les points extérieurs à la surface  $V = 0$ , et très-voisins de cette surface.

En effet, ayant calculé la valeur de l'intégrale proposée à l'intérieur de cette surface, pour obtenir la valeur de la même intégrale à l'intérieur d'une autre surface infiniment voisine, il faudra ajouter les termes correspondant aux portions de la seconde surface *extérieures* à la première et retrancher les termes correspondant aux portions *intérieures* à la première surface, mais qui n'appartiennent pas à la seconde. Or, dans la première hypothèse, les premiers termes seront négatifs, les seconds positifs; la seconde valeur de l'intégrale sera donc toujours plus petite que la première et, par conséquent, on aura un maximum : ce serait le contraire dans l'autre cas. Ce raisonnement légèrement modifié suffirait, au reste, pour établir *a posteriori* l'existence de la proposition elle-même.

La proposition que nous venons de démontrer n'est pas susceptible toutefois d'une application immédiate, sous la forme où nous l'avons établie, parce que le maximum ou le minimum qu'elle considère est un maximum ou minimum *absolu*; mais elle devient féconde, en conséquence, pour les surfaces représentatives, si on la modifie par l'introduction des maxima et des minima *relatifs*, qui se ramènent aux premiers, comme l'on sait, d'une façon fort simple.

C'est ce que nous allons faire dans le lemme suivant :

LEMME II. — Si  $U$  et  $W$  représentent deux fonctions déterminées de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et que l'on compare entre elles les valeurs que prend l'intégrale  $\iiint U \, dx \, dy \, dz$ , à l'intérieur de différentes surfaces, sous la condition que l'intégrale  $\iiint W \, dx \, dy \, dz$  prise entre les mêmes limites conserve une valeur constante, la valeur maximum ou minimum de cette intégrale correspondra à l'une des surfaces représentées par l'équation  $\frac{U}{W} = \text{const.}$

En effet, si l'on recherche à l'intérieur de quelle surface l'intégrale  $\iiint U \, dx \, dy \, dz$  prend une valeur maximum ou minimum, sous la condition que l'intégrale  $\iiint W \, dx \, dy \, dz$  ait une valeur donnée, il faudra, en vertu de la théorie des maxima ou minima relatifs, rechercher le maximum ou



minimum absolu de l'expression

$$\iiint U \, dx \, dy \, dz + C \iiint W \, dx \, dy \, dz = \iiint (U + CW) \, dx \, dy \, dz,$$

C étant une constante. Or, pour l'obtenir, il n'y aura qu'à faire dans le lemme précédent

$$V = U + CW,$$

et la solution nous sera fournie immédiatement par l'équation

$$U + CW = 0,$$

où C est une constante qui sera déterminée précisément par la condition donnée, relative à la seconde intégrale. On voit ainsi que le problème est résolu par l'une des surfaces appartenant à la famille de surfaces représentatives dont l'équation est

$$(26) \quad \frac{U}{W} = \text{const.}$$

Il est bien évident, d'ailleurs, que la proposition est réversible, et que l'on arriverait à la même conclusion si l'on cherchait le maximum ou le minimum de l'intégrale  $\iiint W \, dx \, dy \, dz$  sous la condition que l'intégrale  $\iiint U \, dx \, dy \, dz$  conservât une valeur donnée.

Pour montrer la fécondité de la proposition qui précède, et avant de revenir au mouvement des fluides, qui fait l'objet de ce travail, nous allons l'appliquer comme exemple à un problème emprunté à la théorie de la chaleur.

Imaginons un corps ou milieu dont tous les points étaient originairement à une même température, que nous prendrons pour zéro, et qui, soumis ensuite à l'action de sources constantes de froid ou de chaleur, a fini par arriver à un état d'équilibre de température. Si nous considérons en particulier une portion de ce corps limitée par une surface quelconque, et que nous désignons encore sa densité en chaque point par  $\rho$ , sa masse sera exprimée par l'intégrale  $\iiint \rho \, dx \, dy \, dz$ , et la quantité totale de chaleur perdue ou gagnée, en passant de l'état initial à l'état final, par l'intégrale  $c \iiint \rho \Theta \, dx \, dy \, dz$ ,  $\Theta$  désignant la température et  $c$  le calorique spécifique, que nous supposerons constant. Si l'on se propose de déterminer par quelle surface il faudrait limiter cette portion du corps, pour que, avec une masse donnée, la quantité de chaleur perdue ou gagnée soit maximum ou minimum, il n'y aura qu'à faire dans ce qui précède  $U = c\rho\Theta$ , et  $W = \rho$ , ce qui

donnera pour solution  $\Theta = \text{const.}$ , c'est-à-dire une *surface isotherme*. Ces surfaces jouissent donc de la propriété nouvelle et intéressante de limiter les portions du corps qui, offrant une masse donnée, ont gagné ou perdu dans les conditions précitées une quantité de chaleur maximum ou minimum.

Application  
aux surfaces :

Ces préliminaires établis, appliquons les considérations qui précèdent aux diverses surfaces représentatives qui se présentent dans l'étude du mouvement permanent des fluides. Nous en déduisons sans peine une série de propriétés intéressantes, dont l'ensemble nous paraît jeter un nouveau jour sur la théorie si obscure du mouvement, et dont l'énumération terminera notre travail.

(a) d'égalité de densité,

1° Si l'on prend, pour les deux intégrales considérées dans le lemme II, la masse et le volume de la portion du fluide renfermée à l'intérieur d'une même surface, ou, en d'autres termes, si l'on prend  $U = \rho$  et  $W = 1$ , l'équation (26) se réduit à  $\rho = \text{const.}$ , d'où la conclusion :

THÉORÈME VII. — *Les surfaces d'égalité de densité sont celles qui, pour un volume donné, renferment une masse maximum ou minimum.*

(b) d'égalité de dilatation,

2° Si, au lieu de la masse et du volume d'une portion du fluide, on prend pour les deux intégrales considérées les quantités que nous avons appelées *dilatation totale* et *volume primitif* (voir p. 20) de cette même masse, ou, en d'autres termes, si l'on prend  $U = \frac{\Delta}{1 + \Delta}$  et  $W = \frac{1}{1 + \Delta}$ , l'équation (26) se réduit à  $\Delta = \text{const.}$ , d'où la conclusion :

THÉORÈME VIII. — *Les surfaces d'égalité de dilatation sont celles qui, pour un volume primitif donné, renferment une dilatation totale maximum ou minimum.*

Si l'on se rappelle, d'ailleurs, que d'après nos définitions la dilatation totale exprime la différence entre le volume actuel et le volume primitif d'une même masse, on voit immédiatement qu'on pourra énoncer la propriété précédente sous cette autre forme :

« Les SURFACES D'ÉGALE DILATATION sont celles qui, pour un VOLUME PRIMITIF donné, renferment un VOLUME maximum ou minimum. »

Ou encore sous celle-ci :

« Les SURFACES D'ÉGALE DILATATION sont celles qui, pour un VOLUME donné, renferment une DILATATION TOTALE maximum ou minimum. »

Notons, en outre, que les surfaces d'*égale dilatation* se confondraient évidemment avec les surfaces d'*égale densité*, si l'on avait pris pour *origine des dilatations* l'une de ces dernières surfaces.

La première des deux propositions que nous venons d'énoncer s'applique évidemment aussi bien au cas de l'équilibre qu'au cas du mouvement permanent, et, dans ce cas, elle exprime une propriété nouvelle et intéressante des *surfaces de niveau*, qui sont en même temps, comme l'on sait, surfaces d'*égale pression*, et surfaces d'*égale densité*. La seconde trouvera aussi son application à l'état d'équilibre, si on l'entend des modifications qu'a dû subir, pour arriver à cet état, un fluide compressible primitivement homogène, et soumis ensuite à des actions permanentes. Seulement, dans ce dernier cas, les surfaces d'égale dilatation se confondant évidemment avec les surfaces d'égale densité ou surfaces de niveau, les deux théorèmes ci-dessus n'expriment plus en réalité qu'une seule et même propriété, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre avec un instant de réflexion.

Les propositions suivantes, au contraire, n'ont de signification que dans le cas du mouvement.

3° Prenons, pour les deux intégrales du lemme II, la *force vive totale* (p. 23) et la masse d'une même portion du fluide, c'est-à-dire prenons  $U = \rho V^2$  et  $W = \rho$ , l'équation (26) se réduira à  $V^2 = \text{const.}$ ; d'où la conclusion :

(c) d'égale force vive,

THÉORÈME IX. — *Les surfaces d'égale force vive (ou d'égale vitesse) sont celles qui, pour une masse donnée, renferment une force vive totale maximum ou minimum.*

4° Prenant encore la masse pour l'une des deux intégrales, prenons pour l'autre ce que nous avons appelé le *travail total* (voir p. 23), correspondant à la même portion du fluide, ou, en d'autres termes, faisons  $U = q\rho$  et  $W = \rho$ ; l'équation (26) se réduira à  $q = \text{const.}$ , et par conséquent, en nous reportant aux définitions de la page 23, nous pourrions formuler cette proposition :

(d) d'égal travail,

THÉORÈME X. — *Les surfaces d'égal travail sont celles qui, pour une masse donnée, renferment un travail total maximum ou minimum.*

Il est à remarquer que dans le cas des fluides compressibles, et aussi dans celui des liquides homogènes,  $q$  est un potentiel, et les surfaces d'égal travail dont il est question dans ce théorème sont alors les surfaces de niveau relatives aux actions totales qui sollicitent la molécule fluide.

5° Pour revenir, en terminant, aux deux grandes familles de surfaces

(e) d'égale masse,

de nulle résistance qui font objet plus spécial de ce dernier paragraphe, considérons en même temps la masse et le volume primitifs d'une même portion du fluide, et faisons, dans le lemme II,  $U = \rho$  et  $W = \frac{1}{1 + \Delta}$ ; l'équation (26) deviendra  $\rho(1 + \Delta) = \text{const.}$ , et par conséquent, en nous reportant aux définitions du paragraphe précédent, nous pourrons énoncer cette propriété :

THÉORÈME XI. — *Les surfaces d'égale masse sont celles qui, pour un volume primitif donné, renferment une masse maximum ou minimum.*

Notons seulement que, dans le cas des liquides, les surfaces d'égale masse n'étant autres que les surfaces d'égale densité, cette propriété se confond pour ce cas avec le théorème VII.

(f) d'égale énergie.

6° Enfin considérons, en même temps que la masse, l'énergie totale (p. 24) d'une certaine portion du fluide, c'est-à-dire faisons à la fois  $U = \varphi\rho$  et  $W = \rho$ ; l'équation (26) se réduira à  $\varphi = \text{const.}$ , ce qui nous donnera cette dernière proposition :

THÉORÈME XII. — *Les surfaces d'égale énergie sont celles qui, pour une masse donnée, renferment une énergie totale maximum ou minimum.*

Conclusion.

Ces propriétés remarquables, jointes à la représentation que nous avons donnée du mouvement, font comprendre l'importance du rôle que les surfaces d'égale masse et d'égale énergie jouent dans la théorie, et l'intérêt qu'elles empruntent à leur double caractère de surfaces *représentatives*, et de surfaces de *nulle résistance*. C'est pourquoi nous nous sommes proposé, dans ce travail, d'appeler sur elles l'attention des géomètres, dans la pensée que peut-être leur considération pourrait servir de point de départ à un analyste plus habile, pour aborder le problème si difficile de l'intégration des équations de l'Hydrodynamique.

---

---

## RÉSUMÉ ANALYTIQUE.

---

INTRODUCTION. — Exposé du sujet ..... 1

I. — SURFACES DE NULLE RÉSISTANCE.

*Définitions. — Propriétés caractéristiques.*

Résistance au mouvement d'un fluide .....	2
Surfaces de nulle résistance .....	3
Propriétés relatives : (a) à l'ellipsoïde central d'inertie.....	3
»    (b) au solide représentatif.....	5
Examen du cas général.....	7
Démonstration synthétique.....	7
Démonstration analytique.....	11

II. — RECHERCHE ANALYTIQUE DES SURFACES DE NULLE RÉSISTANCE.

*Équation aux différences partielles. — Solutions complètes. — Équation générale en termes finis.*

Équation aux différences partielles .....	15
Interprétation mécanique de cette équation.....	16
Première solution complète .....	16
Cas des liquides.....	16
Cas des fluides compressibles.....	17
Définition de la dilatation.....	17
Expression de la masse moléculaire.....	18
Surfaces d'égale masse .....	19
Définitions : (a) du volume primitif.....	20
»    (b) de la dilatation totale.....	20
Deuxième solution complète.....	20
Définitions : (a) de la force vive.....	22
»    (b) du travail .....	23
»    (c) de l'énergie.....	24
Surfaces d'égale énergie .....	24
Intégrale des forces vives.....	25
Équation générale en termes finis .....	26

III. — ÉTUDE PARTICULIÈRE DES SURFACES D'ÉGALE MASSE ET D'ÉGALE ÉNERGIE.

*Représentation géométrique du mouvement. — Propriétés de maximum et de minimum.*

Détermination géométrique : (a) de la trajectoire .....	27
» (b) de la vitesse .....	28
Démonstration synthétique.....	28
Démonstration analytique.....	29
Cas particulier des liquides homogènes .....	31
Propriétés de maximum et de minimum.....	32
Lemmes relatifs aux surfaces représentatives .....	33
Application aux surfaces (a) d'égale densité.....	36
» (b) d'égale dilatation .....	36
» (c) d'égale force vive.....	37
» (d) d'égal travail .....	37
» (e) d'égale masse .....	37
» (f) d'égale énergie .....	38
CONCLUSION .....	38

*Vu et approuvé.*

Le 16 juin 1873.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
MILNE EDWARDS.

*Permis d'imprimer.*

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

## SECONDE THÈSE.

---

### PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

1° Démontrer qu'un ellipsoïde à trois axes inégaux peut être la figure d'une masse fluide qui tourne uniformément autour d'un axe fixe, et dont les molécules s'attirent mutuellement en raison inverse du carré de la distance.

2° Propriétés des fonctions doublement périodiques.

*Vu et approuvé.*

Le 16 juin 1873.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

*Permis d'imprimer.*

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.





# LICENCE

End of the Project Gutenberg EBook of Étude sur le Mouvement Permanent des Fluides, by François de Salvert

\*\*\* END OF THIS PROJECT GUTENBERG EBOOK FLUIDES \*\*\*

\*\*\*\*\* This file should be named 33083-pdf.pdf or 33083-pdf.zip \*\*\*\*\*  
This and all associated files of various formats will be found in:  
<http://www.gutenberg.org/3/3/0/8/33083/>

Produced by Sébastien Blondeel, Joshua Hutchinson, and the  
Online Distributed Proofreading Team at <http://www.pgdp.net>  
(This file was produced from images from the Cornell  
University Library: Historical Mathematics Monographs  
collection.)

Updated editions will replace the previous one--the old editions  
will be renamed.

Creating the works from public domain print editions means that no  
one owns a United States copyright in these works, so the Foundation  
(and you!) can copy and distribute it in the United States without  
permission and without paying copyright royalties. Special rules,  
set forth in the General Terms of Use part of this license, apply to  
copying and distributing Project Gutenberg-tm electronic works to  
protect the PROJECT GUTENBERG-tm concept and trademark. Project  
Gutenberg is a registered trademark, and may not be used if you  
charge for the eBooks, unless you receive specific permission. If you  
do not charge anything for copies of this eBook, complying with the  
rules is very easy. You may use this eBook for nearly any purpose  
such as creation of derivative works, reports, performances and  
research. They may be modified and printed and given away--you may do  
practically ANYTHING with public domain eBooks. Redistribution is  
subject to the trademark license, especially commercial  
redistribution.

\*\*\* START: FULL LICENSE \*\*\*

THE FULL PROJECT GUTENBERG LICENSE  
PLEASE READ THIS BEFORE YOU DISTRIBUTE OR USE THIS WORK

To protect the Project Gutenberg-tm mission of promoting the free  
distribution of electronic works, by using or distributing this work  
(or any other work associated in any way with the phrase "Project  
Gutenberg"), you agree to comply with all the terms of the Full Project  
Gutenberg-tm License (available with this file or online at  
<http://gutenberg.org/license>).

Section 1. General Terms of Use and Redistributing Project Gutenberg-tm  
electronic works

1.A. By reading or using any part of this Project Gutenberg-tm  
electronic work, you indicate that you have read, understand, agree to  
and accept all the terms of this license and intellectual property

## LICENCE

(trademark/copyright) agreement. If you do not agree to abide by all the terms of this agreement, you must cease using and return or destroy all copies of Project Gutenberg-tm electronic works in your possession. If you paid a fee for obtaining a copy of or access to a Project Gutenberg-tm electronic work and you do not agree to be bound by the terms of this agreement, you may obtain a refund from the person or entity to whom you paid the fee as set forth in paragraph 1.E.8.

1.B. "Project Gutenberg" is a registered trademark. It may only be used on or associated in any way with an electronic work by people who agree to be bound by the terms of this agreement. There are a few things that you can do with most Project Gutenberg-tm electronic works even without complying with the full terms of this agreement. See paragraph 1.C below. There are a lot of things you can do with Project Gutenberg-tm electronic works if you follow the terms of this agreement and help preserve free future access to Project Gutenberg-tm electronic works. See paragraph 1.E below.

1.C. The Project Gutenberg Literary Archive Foundation ("the Foundation" or PGLAF), owns a compilation copyright in the collection of Project Gutenberg-tm electronic works. Nearly all the individual works in the collection are in the public domain in the United States. If an individual work is in the public domain in the United States and you are located in the United States, we do not claim a right to prevent you from copying, distributing, performing, displaying or creating derivative works based on the work as long as all references to Project Gutenberg are removed. Of course, we hope that you will support the Project Gutenberg-tm mission of promoting free access to electronic works by freely sharing Project Gutenberg-tm works in compliance with the terms of this agreement for keeping the Project Gutenberg-tm name associated with the work. You can easily comply with the terms of this agreement by keeping this work in the same format with its attached full Project Gutenberg-tm License when you share it without charge with others.

1.D. The copyright laws of the place where you are located also govern what you can do with this work. Copyright laws in most countries are in a constant state of change. If you are outside the United States, check the laws of your country in addition to the terms of this agreement before downloading, copying, displaying, performing, distributing or creating derivative works based on this work or any other Project Gutenberg-tm work. The Foundation makes no representations concerning the copyright status of any work in any country outside the United States.

1.E. Unless you have removed all references to Project Gutenberg:

1.E.1. The following sentence, with active links to, or other immediate access to, the full Project Gutenberg-tm License must appear prominently whenever any copy of a Project Gutenberg-tm work (any work on which the phrase "Project Gutenberg" appears, or with which the phrase "Project Gutenberg" is associated) is accessed, displayed, performed, viewed, copied or distributed:

This eBook is for the use of anyone anywhere at no cost and with almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included with this eBook or online at [www.gutenberg.org](http://www.gutenberg.org)

## LICENCE

1.E.2. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is derived from the public domain (does not contain a notice indicating that it is posted with permission of the copyright holder), the work can be copied and distributed to anyone in the United States without paying any fees or charges. If you are redistributing or providing access to a work with the phrase "Project Gutenberg" associated with or appearing on the work, you must comply either with the requirements of paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 or obtain permission for the use of the work and the Project Gutenberg-tm trademark as set forth in paragraphs 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.3. If an individual Project Gutenberg-tm electronic work is posted with the permission of the copyright holder, your use and distribution must comply with both paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 and any additional terms imposed by the copyright holder. Additional terms will be linked to the Project Gutenberg-tm License for all works posted with the permission of the copyright holder found at the beginning of this work.

1.E.4. Do not unlink or detach or remove the full Project Gutenberg-tm License terms from this work, or any files containing a part of this work or any other work associated with Project Gutenberg-tm.

1.E.5. Do not copy, display, perform, distribute or redistribute this electronic work, or any part of this electronic work, without prominently displaying the sentence set forth in paragraph 1.E.1 with active links or immediate access to the full terms of the Project Gutenberg-tm License.

1.E.6. You may convert to and distribute this work in any binary, compressed, marked up, nonproprietary or proprietary form, including any word processing or hypertext form. However, if you provide access to or distribute copies of a Project Gutenberg-tm work in a format other than "Plain Vanilla ASCII" or other format used in the official version posted on the official Project Gutenberg-tm web site ([www.gutenberg.org](http://www.gutenberg.org)), you must, at no additional cost, fee or expense to the user, provide a copy, a means of exporting a copy, or a means of obtaining a copy upon request, of the work in its original "Plain Vanilla ASCII" or other form. Any alternate format must include the full Project Gutenberg-tm License as specified in paragraph 1.E.1.

1.E.7. Do not charge a fee for access to, viewing, displaying, performing, copying or distributing any Project Gutenberg-tm works unless you comply with paragraph 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.8. You may charge a reasonable fee for copies of or providing access to or distributing Project Gutenberg-tm electronic works provided that

- You pay a royalty fee of 20% of the gross profits you derive from the use of Project Gutenberg-tm works calculated using the method you already use to calculate your applicable taxes. The fee is owed to the owner of the Project Gutenberg-tm trademark, but he has agreed to donate royalties under this paragraph to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation. Royalty payments must be paid within 60 days following each date on which you prepare (or are legally required to prepare) your periodic tax

## LICENCE

returns. Royalty payments should be clearly marked as such and sent to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation at the address specified in Section 4, "Information about donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation."

- You provide a full refund of any money paid by a user who notifies you in writing (or by e-mail) within 30 days of receipt that s/he does not agree to the terms of the full Project Gutenberg-tm License. You must require such a user to return or destroy all copies of the works possessed in a physical medium and discontinue all use of and all access to other copies of Project Gutenberg-tm works.
- You provide, in accordance with paragraph 1.F.3, a full refund of any money paid for a work or a replacement copy, if a defect in the electronic work is discovered and reported to you within 90 days of receipt of the work.
- You comply with all other terms of this agreement for free distribution of Project Gutenberg-tm works.

1.E.9. If you wish to charge a fee or distribute a Project Gutenberg-tm electronic work or group of works on different terms than are set forth in this agreement, you must obtain permission in writing from both the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and Michael Hart, the owner of the Project Gutenberg-tm trademark. Contact the Foundation as set forth in Section 3 below.

### 1.F.

1.F.1. Project Gutenberg volunteers and employees expend considerable effort to identify, do copyright research on, transcribe and proofread public domain works in creating the Project Gutenberg-tm collection. Despite these efforts, Project Gutenberg-tm electronic works, and the medium on which they may be stored, may contain "Defects," such as, but not limited to, incomplete, inaccurate or corrupt data, transcription errors, a copyright or other intellectual property infringement, a defective or damaged disk or other medium, a computer virus, or computer codes that damage or cannot be read by your equipment.

1.F.2. LIMITED WARRANTY, DISCLAIMER OF DAMAGES - Except for the "Right of Replacement or Refund" described in paragraph 1.F.3, the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, the owner of the Project Gutenberg-tm trademark, and any other party distributing a Project Gutenberg-tm electronic work under this agreement, disclaim all liability to you for damages, costs and expenses, including legal fees. YOU AGREE THAT YOU HAVE NO REMEDIES FOR NEGLIGENCE, STRICT LIABILITY, BREACH OF WARRANTY OR BREACH OF CONTRACT EXCEPT THOSE PROVIDED IN PARAGRAPH F3. YOU AGREE THAT THE FOUNDATION, THE TRADEMARK OWNER, AND ANY DISTRIBUTOR UNDER THIS AGREEMENT WILL NOT BE LIABLE TO YOU FOR ACTUAL, DIRECT, INDIRECT, CONSEQUENTIAL, PUNITIVE OR INCIDENTAL DAMAGES EVEN IF YOU GIVE NOTICE OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGE.

1.F.3. LIMITED RIGHT OF REPLACEMENT OR REFUND - If you discover a defect in this electronic work within 90 days of receiving it, you can

## LICENCE

receive a refund of the money (if any) you paid for it by sending a written explanation to the person you received the work from. If you received the work on a physical medium, you must return the medium with your written explanation. The person or entity that provided you with the defective work may elect to provide a replacement copy in lieu of a refund. If you received the work electronically, the person or entity providing it to you may choose to give you a second opportunity to receive the work electronically in lieu of a refund. If the second copy is also defective, you may demand a refund in writing without further opportunities to fix the problem.

1.F.4. Except for the limited right of replacement or refund set forth in paragraph 1.F.3, this work is provided to you 'AS-IS' WITH NO OTHER WARRANTIES OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO WARRANTIES OF MERCHANTABILITY OR FITNESS FOR ANY PURPOSE.

1.F.5. Some states do not allow disclaimers of certain implied warranties or the exclusion or limitation of certain types of damages. If any disclaimer or limitation set forth in this agreement violates the law of the state applicable to this agreement, the agreement shall be interpreted to make the maximum disclaimer or limitation permitted by the applicable state law. The invalidity or unenforceability of any provision of this agreement shall not void the remaining provisions.

1.F.6. INDEMNITY - You agree to indemnify and hold the Foundation, the trademark owner, any agent or employee of the Foundation, anyone providing copies of Project Gutenberg-tm electronic works in accordance with this agreement, and any volunteers associated with the production, promotion and distribution of Project Gutenberg-tm electronic works, harmless from all liability, costs and expenses, including legal fees, that arise directly or indirectly from any of the following which you do or cause to occur: (a) distribution of this or any Project Gutenberg-tm work, (b) alteration, modification, or additions or deletions to any Project Gutenberg-tm work, and (c) any Defect you cause.

### Section 2. Information about the Mission of Project Gutenberg-tm

Project Gutenberg-tm is synonymous with the free distribution of electronic works in formats readable by the widest variety of computers including obsolete, old, middle-aged and new computers. It exists because of the efforts of hundreds of volunteers and donations from people in all walks of life.

Volunteers and financial support to provide volunteers with the assistance they need, are critical to reaching Project Gutenberg-tm's goals and ensuring that the Project Gutenberg-tm collection will remain freely available for generations to come. In 2001, the Project Gutenberg Literary Archive Foundation was created to provide a secure and permanent future for Project Gutenberg-tm and future generations. To learn more about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and how your efforts and donations can help, see Sections 3 and 4 and the Foundation web page at <http://www.pgla.org>.

### Section 3. Information about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

## LICENCE

The Project Gutenberg Literary Archive Foundation is a non profit 501(c)(3) educational corporation organized under the laws of the state of Mississippi and granted tax exempt status by the Internal Revenue Service. The Foundation's EIN or federal tax identification number is 64-6221541. Its 501(c)(3) letter is posted at <http://pglaf.org/fundraising>. Contributions to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation are tax deductible to the full extent permitted by U.S. federal laws and your state's laws.

The Foundation's principal office is located at 4557 Melan Dr. S. Fairbanks, AK, 99712., but its volunteers and employees are scattered throughout numerous locations. Its business office is located at 809 North 1500 West, Salt Lake City, UT 84116, (801) 596-1887, email [business@pglaf.org](mailto:business@pglaf.org). Email contact links and up to date contact information can be found at the Foundation's web site and official page at <http://pglaf.org>

For additional contact information:

Dr. Gregory B. Newby  
Chief Executive and Director  
[gnewby@pglaf.org](mailto:gnewby@pglaf.org)

#### Section 4. Information about Donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

Project Gutenberg-tm depends upon and cannot survive without wide spread public support and donations to carry out its mission of increasing the number of public domain and licensed works that can be freely distributed in machine readable form accessible by the widest array of equipment including outdated equipment. Many small donations (\$1 to \$5,000) are particularly important to maintaining tax exempt status with the IRS.

The Foundation is committed to complying with the laws regulating charities and charitable donations in all 50 states of the United States. Compliance requirements are not uniform and it takes a considerable effort, much paperwork and many fees to meet and keep up with these requirements. We do not solicit donations in locations where we have not received written confirmation of compliance. To SEND DONATIONS or determine the status of compliance for any particular state visit <http://pglaf.org>

While we cannot and do not solicit contributions from states where we have not met the solicitation requirements, we know of no prohibition against accepting unsolicited donations from donors in such states who approach us with offers to donate.

International donations are gratefully accepted, but we cannot make any statements concerning tax treatment of donations received from outside the United States. U.S. laws alone swamp our small staff.

Please check the Project Gutenberg Web pages for current donation methods and addresses. Donations are accepted in a number of other ways including checks, online payments and credit card donations. To donate, please visit: <http://pglaf.org/donate>

## LICENCE

Section 5. General Information About Project Gutenberg-tm electronic works.

Professor Michael S. Hart is the originator of the Project Gutenberg-tm concept of a library of electronic works that could be freely shared with anyone. For thirty years, he produced and distributed Project Gutenberg-tm eBooks with only a loose network of volunteer support.

Project Gutenberg-tm eBooks are often created from several printed editions, all of which are confirmed as Public Domain in the U.S. unless a copyright notice is included. Thus, we do not necessarily keep eBooks in compliance with any particular paper edition.

Most people start at our Web site which has the main PG search facility:

<http://www.gutenberg.org>

This Web site includes information about Project Gutenberg-tm, including how to make donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, how to help produce our new eBooks, and how to subscribe to our email newsletter to hear about new eBooks.